Задачи для подготовки к семестровой контрольной
«Алгебра логики, комбинаторика, теория графов» (ФПМИ)

Преамбула

Контрольная пройдёт в субботу 30 октября с 15:30 до 18:30 (общее время, включая рассадку по аудиториям, выдачу вариантов и сбор работ). О распределении по аудиториям будет сообщено позднее на странице http://www.rubtsov.su/alctg21. На контрольной нельзя использовать никакие вспомогательные материалы! В случае обнаружения справочных материалов (шпаргалок), мобильного телефона (или иной техники) студент будет удалён с контрольной, а за контрольную будет выставлена оценка 0 (хуже, чем «неуд (1)»).

В контрольной будет три типа задач. Задачи первого типа требуют только ответ и затрагивают классические факты из курса. В задачах второго типа требуется сформулировать определение и ответить на контрольный вопрос. Задачи третьего типа — содержательные задачи на владение материалом курса, подобные задачам из классных и домашних работ.

В контрольную войдут все темы до «Комбинаторика I. Правила суммы и произведения» включительно (первая не вошедвая тема — комбинаторика II).

При подготовке к контрольной помните, что вряд ли хотя бы одну задачу получится решить правильно, если вы не знаете определений.

Вариант для подготовки

В скобках после номера задачи указано число баллов за задачу. На контрольной будет вариант, близкий по духу к данному, однако число задач может отличаться, как и соответствие задач темам.

Приведите ответ (обоснование не требуется).

Не обязательно приводить в ответе число в десятичной записи, если в условии не требуется численный ответ.

1 (1). Известно, что вектор значений булевой функции f имеет вид 0?10?1?1, где ? — это 0 или 1. Найдите число всевозможных функций f.

2 (2). Найдите число пятиэлементных подмножеств множества

$$\{2n \mid -1 \leqslant n \leqslant 10, n \in \mathbb{Z}\},$$

содержащих число 14. Ответом должно быть число в десятичной записи.

3 (2). Сколько не обязательно осмысленных слов можно получить, переставляя буквы в слове «ГОЛОСЛОВНЫЙ»?

4 (2). Приведите примеры множеств A, B, C, D для которых $(A \cup B) \setminus B = A$ и $(C \cup D) \setminus D \neq C$.

5 (2). Найдите число различных правильных раскрасок графа-пути длины 5 в три цвета.

6 (2). Приведите пример дерева на 6 вершинах, в котором ровно 4 (несовпадающих) диаметра.

Приведите определение и обоснованнно ответьте на вопрос.

7 (3). Полный прообраз. Функция f из множества $\{1, 2, \ldots, 8\}$ в множество $\{a, b, c, d, e\}$ определена следующим образом

$$f : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto a, \quad 3 \mapsto c, \quad 4 \mapsto d, \quad 5 \mapsto c, \quad 7 \mapsto d.$$

Найдите полный прообраз множества $\{a, b, c\}$.

8 (3). Биекция. Найдите число различных биекций между двоичными словами длины 3 и множеством чисел $\{0, 1, \ldots, 7\}$.

9 (3). Дерево. Верно ли, что если в графе число вершин на единицу больше, чем число ребер, то граф — дерево?

Приведите обоснованные решения

10 (4). Существует ли граф на семи вершинах со степенями вершин $(1, 2, 2, 2, 5, 5, 5)$?

11 (5). Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид

$$f = a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus (a_2 \wedge x_2) \oplus \ldots \oplus (a_n \wedge x_n).$$

Выразите с помощью коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ **а)** число её фиктивных переменных; **б)** число единиц в её векторе значений.

12 (5). На окружности отмечены 2020 различных точек. Одна из этих точек синего цвета, а остальные — красного. Каких дуг окружности с концами в двух различных из этих 2020 точек больше: тех, на которых лежит синяя точка (в том числе, возможно, в качестве одного из концов), или остальных?

13 (5). Существует ли такое отображение $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$, что из любого связного (простого неориентированного) графа на более k вершинах, в котором степень каждой вершины не меньше $f(k)$, при удалении любых k вершин (со всеми смежными рёбрами) получается связный граф?

14 (6). В стране из каждого города исходит не меньше $m \geqslant 2$ двусторонних автомобильных дорог и любые два города связаны не более чем одной дорогой. Докажите, что некоторый город лежит на кольцевом маршруте длины не меньше $m + 1$, в котором все города разные, т. е. из города можно выехать в другой, из другого в третий и так далее, каждый раз отправляясь в новый город, и вернуться в конце маршрута из последнего города в первый.