Ответы, указания, решения и критерии проверки

Описание критериев:

Критерии.

k Означает, что описанная часть задачи оценивается из не более k баллов (или так оценивается решение попадающее под критерии)

$+1$ Означает, что описанная в пункте часть решения стоит 1 балл.

-1 Означает, что за описанную в пункте ошибку снимается 1 балл.

Критерии описывают только общие случаи и не являются исчерпывающими.

Приведите ответ (обоснование не требуется).

Запишите ответ сразу после условия задачи! Не обязательно приводить в ответе число в десятичной записи, если в условии не требуется численный ответ.

1 (2). $U = \mathbb{Z}$; $A = \{x : (-4 \leqslant x \leqslant 34) \wedge (x \,⋮\, 3)\}$. Найдите число четырёхэлементных подмножеств множества A.

Ответ: $\binom{13}{4} = 715$

Критерии.

0 Неправильный ответ

2 (2). Укажите все булевы функции, равные функции $(\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2})$:

а) $(x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2)$; **б)** $x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \wedge x_2$; **в)** $x_1 \wedge (x_1 \to x_2) \wedge x_3 \vee x_2$.

Ответ: Таких нет (пустой список засчитывается)

Критерии.

0 Неправильный ответ

3 (2). Определим граф $G(V, E)$: $V = \{1, \ldots, 13\}$, $E = \{\{x, y\} : |y - x| = 4\} \subseteq \binom{V}{2}$. Сколько в графе G компонент связности?

Ответ: 4

Критерии.

0 Неправильный ответ

4 (3). Пусть A и B — произвольные множества. Укажите все верные утверждения.

а) $A = B \iff A \in \{B\}$; **б)** $A = B \iff \{A\} \subseteq \{B\}$; **в)** $A = B \iff \{A\} \subseteq \{B, \varnothing\}$;

г) $A = B \iff A \times B = B \times A$; **д)** $A \in B \iff \{A\} \subseteq B$; **е)** $A \in B \iff \{A\} \subseteq \binom{B}{2}$.

Ответ: а, б, д

Критерии.

-1 за каждую ошибку (оценка за задачу не меньше 0)

5 (3). Найдите число замкнутых эйлеровых маршрутов в графе **а)** K_3; **б)** K_6.

Ответ: **а)** 6; **б)** 0.

Критерии.

-1.5 за каждую ошибку

6 (3). В выборах участвовало k кандидатов. На участки пришло n избирателей, но некоторые унесли бюллетень с собой, а некоторые опустили в урну недействительные бюллетени. Найдите количество всевозможных результатов выборов (количеств голосов у каждого кандидата); бюллетень действителен, если в нём выбран ровно один кандидат.

Ответ: $\dbinom{n+k}{k}$

Критерии.

3 Ответ $\binom{n+k-2}{k}$. Условие допускает трактовку, согласно которой известно, что хотя бы один бюллетень был испорчен, и хотя бы один был унесён с собой

-1 Ответ представлен в виде суммы.

0 Неправильный ответ

7 (4). Найдите значение выражения:

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=42\\ n_1,n_2,n_3\in\mathbb{N}_0}} \frac{42!}{n_1!n_2!n_3!}(-1)^{n_1+n_2}$$

Ответ: 1

Указания. Приведено разложение $(-1-1+1)^{42}$

Критерии.

0 Неправильный ответ

8 (4). В экзаменнационную сессию МФТИ нужно провести 4 экзамена с 9 по 29 января (включительно); при этом закон требует, чтобы между любыми двумя экзаменами у студентов было хотя бы 3 дня на подготовку (если экзамен назначен на день x, то следующий не раньше дня $x+4$). Из-за сложности составления расписания, разрешено проводить экзамен даже в воскресенье. Найдите число допустимых расписаний (каждый экзамен начинается в 9:00).

Ответ: $4! \times \binom{12}{4} = 11880$

Критерии.

3 Ответ $\binom{12}{4} = 495$.

0 Другой неправильный ответ.

9(4). Отметьте все справедливые утверждения (и только их). Пусть X и Y непустые конечные множества.

☑ 1. Если существует инъекция из X в Y, но не существует инъекции из Y в X, то не существует сюръекции из X в Y.

☐ 2. Если существует сюръекция из X в Y, то существует сюръекция из Y в X.

☑ 3. Если существует биекция из X в Y, то число сюръекций из X в Y равно числу инъекций из X в Y.

☐ 4. Если f — частичная функция из X в Y и $f(A) = B$, то $f^{-1}(B) = A$, где $A \subseteq X$.

☐ 5. Если f — частичная функция из X в Y и $f^{-1}(B) = A$, то $f(A) = B$, где $B \subseteq Y$.

☐ 6. Если f — отображение из X в Y и $f(A) = B$, то $|f^{-1}(B)| \leqslant |A|$, где $A \subseteq X$.

Критерии.

-1 за каждую ошибку (оценка за задачу не меньше 0)

Приведите определение и обоснованно ответьте на вопрос

Критерии.

1 За верное определение

2 За верный и обоснованный ответ на контрольный вопрос

Подпишите этот лист!

10(3). *Дерево.* Верно ли, что если в графе число вершин на единицу больше, чем число ребер, то граф дерево?

Ответ: Нет, граф может быть несвязен; контрпример: треугольник и изолированная вершина ($K_3 \cup P_0$).

11 (3). *Инъекция.* Существует ли инъекция из множества путей длины 3 в графе K_4 в множество всевозможных слов, которые можно получить перестановкой букв в слове «HELP»?

Ответ: Да, потому что число путей $4!/2$, а число перестановок $4!$; из любого множества меньшего размера существует инъекция в множество большего размера.

Критерии.

1 Верное вычисление числа путей и перестановок

1 Обоснование существования инъекции

12 (3). *Тавтология.* Какое максимальное число существенных переменных может иметь тавтология $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$?

Ответ: 0. Все переменные тавтологии фиктивны, поскольку $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ на любом входном наборе.

Приведите обоснованные решения

13 (4). Найдите число (простых) неориентированных графов $G(\{1, 2, \ldots, 20\}, E)$, в которых 58 рёбер и три компоненты связности с размерами 5, 7, 8.

Решение. Выберем состав КС $\binom{20}{5\ 7\ 8} = \frac{20!}{5!7!8!}$ способами. Если каждая КС является кликой, имеем 59 рёбер. Убрать лишнее ребро можно 59 способами. В итоге имеем ответ: $59 \cdot \binom{20}{5\ 7\ 8}$

Критерии.

1 Если посчитан только множитель 59 (как число способов убрать лишнее ребро)

2.5 Если есть только число вариантов выбора КС $\binom{20}{5\ 7\ 8}$

14 (4). Пусть f – частичная функция из конечного множества $X \neq \varnothing$ в $Y \neq \varnothing$. При этом известно, что $\forall A \subseteq X : |A| \leqslant 4$ выполняется $|A| = |f(A)|$. Является ли f всюду определённой? Является ли f инъективной? Ответ на второй вопрос считается положительным, даже если f не всюду определена, но условие инъективности выполняется.

Решение.

1. Да, f всюду определена. Предположим противное: $\exists x \in X : f(\{x\}) = \varnothing$. Но тогда получаем противоречие с условием: $4 \geqslant 1 = |\{x\}| \neq |f(\{x\})| = |\varnothing| = 0$.

2. Да, f инъективна. Предположим противное: $\exists x_1, x_2 \in X : (x_1 \neq x_2) \wedge (f(x_1) = f(x_2))$. Но тогда получаем противоречие с условием: $4 \geqslant 2 = |\{x_1, x_2\}| \neq |f(\{x_1, x_2\})| = |\{f(x_1)\}| = 1$.

Критерии.

$+2$ За каждый пункт.

15 (2+4+5). Для любого положительного целого числа n определим граф G_n следующим образом: вершинами являются все подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, а рёбра проведены между парами пересекающихся множеств (т.е. $\{u, v\} \in E(G_n) \iff u \cap v \neq \varnothing$). Ответьте на следующие вопросы для каждого $n \geqslant 1$.

1. Сколько изолированных вершин и компонент связности в G_n?

2. Сколько вершин в клике максимального размера в графе G_n?

3. Найдите $|E(G_n)|$. Ответом должно быть число (зависящее от n); в случае ответа в виде суммы (количество слагаемых которой зависит от n) пункт оценивается из трёх баллов.

Решение.

1. Две изолированные вершины для $n = 1$, одна во всех остальных случаях (пустое множество). Компоненты связности всегда две: из $\{1, \ldots, n\}$ есть рёбра во все вершины, кроме $\varnothing$.

2. Заметим, что клики размера больше, чем 2^{n-1}, в графе G_n быть не может. Действительно, предположим противное. Рассмотрим клику большего размера — K. Всего вершин — 2^n, поэтому в K содержится более половины вершин графа. По принципу Дирихле в K найдётся пара $\{v, \overline{v}\}$. Но эти два множества имеют пустое пересечение. Противоречие.

   Осталось заметить, что есть хотя бы одна клика размера 2^{n-1}. Например, можно взять все множества, содержащие 1.

3. Каждая вершина $v \in V$, кроме $\varnothing$, имеет степень $2^n - 2^{n-|v|} - 1$ (число вершин, не смежных с данной, равно $2^{n-|v|}$). Заметим, что $|\{v : |v| = k\}| = \binom{n}{k}$. По лемме о рукопожатиях имеем
$$|E| = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(2^n - 2^{n-k} - 1\right) + 1\right] = \frac{4^n - 3^n - 2^n + 1}{2}$$

Критерии.

-1 Если в первом пункте пропущен случай $n = 1$ (две изолированные вершины).

-2 Если во втором пункте либо приведена оценка без примера, либо пример без оценки.

-2 Если в последнем пункте приведена рекуррента, или не посчитана сумма.