# Программа и задание по курсу

# «Алгебра логики, комбинаторика, теория графов (для ФПМИ). Дискретный анализ (для ФРКТ)»

2022 г.

## Программа

1. **Алгебра логики.** Высказывания и логические связки. Булевы функции и способы их задания: таблицы истинности, формулы, вектор значений. Законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, приоритет операций. Законы поглощения. Равенство булевых функций (и булевых формул). Существенные и фиктивные переменные.

2. **Множества и логика.** Множества и операции над ними. Связь алгебры логики и алгебры множеств: предикаты, юнивёрсум и дополнение, законы де Моргана, кванторы, эквивалентность тождеств алгебры множеств и алгебры логики, импликация и включение множеств, контрапозиция.

3. **Математические определения, утверждения и доказательства.** Определение, утверждение, теорема, критерий. Запись утверждений в кванторах (формулы первого порядка). Методы доказательств: контрапозиция, индукция, от противного, конструктивные (примеры и контрпримеры), неконструктивные. Границы применимости «наивной теории множеств» — парадокс Рассела.

4. **Графы I. Неориентированные графы.** Определение неориентированных графов. Степень вершины. Сумма степеней вершин —

удвоенное количество рёбер. Число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно. Теоретико множественные операции с графами. Определение подграфа. Определение путей и циклов (через подграфы). Связные графы и компоненты связности (через подграфы).

5. **Графы II. Деревья.** Связность. Теорема «число компонент связности $\geqslant |V| - |E|$». Маршруты и замкнутые маршруты. Между двумя вершинами графа есть путь, если между ними есть маршрут. Деревья. Теорема об эквивалентности четырёх свойств. Расстояние между вершинами, диаметр графа. Диаметр любого связного графа не превосходит $|V| - 1$. Двураскрашиваемый граф. Граф двураскрашиваемый тогда и только тогда, когда нет циклов нечётной длины. Эйлеровы маршруты.

6. **Двудольные графы, паросочетания и функции.** Двудольные графы и паросочетание. Теорема Холла (без доказательства). Функции (область определения, множество значений, образ, полный прообраз). Отображения (всюду определённые функции): инъекции, сюръекции, биекции. Отображения и задача о назначениях. Изоморфизм графов. Доказательство теоремы Холла*. Примеры применения на регулярных графах*.

7. **Комбинаторика I. Правила суммы и произведения.** Отображения и подсчёты. Правило суммы. Правило произведения — биекция с декартовым произведением множеств. Число двоичных слов длины $n$. Число подмножеств $n$-элементного множества. Размещения. Перестановки. Подсчёт количества слов длины $k$ с разными буквами. Подсчёты с кратностью: сколько различных слов можно составить из слова «Математика»? Число сочетаний. Количество $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества. Дискретная вероятность.

8. **Комбинаторика II. Биномиальные коэффициенты.** Количество путей по узлам клеток (вправо и вверх) из $(0,0)$ в $(i,j)$ есть $\binom{i+j}{i}$. Треугольник Паскаля и его свойства: симметрия, возрастание биномиальных коэффициентов к середине, оценка

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{2n+1}.$$

Бином Ньютона и биномиальные коэффициенты. Рекуррентное соотношение. Сумма биномиальных коэффициентов и её комбинаторный смысл. Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов. Комбинаторные доказательства. Рекуррентное соотношение на биномиальные коэффициенты в треугольнике Паскаля. Задача о командире и солдатах: $n \times 2^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. Формула $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Метод точек и перегородок. Число решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

в неотрицательных целых числах есть $\binom{n+k-1}{k-1}$ (Формула Муавра). Число мономов степени $d$. Число сочетаний с повторениями. Числа Фибоначчи. Числа Каталана (доказательство явной формулы).

9. **Комбинаторика III. Формула включений-исключений.** Характеристические функции. Доказательство формула включений-исключений. Примеры: количество чисел от 1 до 1000 не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7; связь со знакопеременной суммой биномиальных коэффициентов; подсчёт сюръекций. Задача о счастливых билетах. Подсчёт числа отображений (всюду определённых функций), функций, инъекций, биекций из $n$-элементного множества в $n$-элементное множество Множества и функции. Смысл обозначений $2^A$ для множества всех подмножеств и $Y^X$ для множества отображений из $X$ в $Y$. Принцип Дирихле: при $m > n$ нет инъекции из $\{1, \ldots, m\}$ в $\{1, \ldots, n\}$.

10. **Бинарные отношения. Отношения эквивалентности.** Формальное определение отношений и их свойств: рефлексивность, транзитивность, симметричность, антисимметричность. Задание бинарного отношения таблицей, двудольным графом, перечислением пар. Примеры отношений эквивалентности: рациональные числа, равные и подобные треугольники, неопределённые интегралы. Формальное определение. **Т.:** Классы эквивалентности не пересекаются или совпадают. Теоретико-множественные операции с отношениями. Операция обращения. Описание с помощью булевых матриц. Композиция отношений (связь с базами данных).

11. **Ориентированные графы и отношения порядка.** Определение ориентированного графа. Исходящие и входящие степени — аналог формулы суммы степененй для неориентированного графа. Компоненты сильной связности.

    **Т.:** Следующие условия для ориентированного графа равносильны:

    - Каждая компонента сильной связности тривиальна (состоит из одной вершины).

- Граф ациклический.
- Вершины графа можно занумеровать так, что рёбра идут только от вершин с меньшим номером к вершинам с большим номером.

Примеры отношений (частичного) порядка, формальное определение. Линейный порядок. Отношение непосредственного следования и его граф (диаграмма Хассе). Покоординатный порядок. Булев куб — двоичные слова, упорядоченные покоординатно.

### 12. Булевы функции

Алгоритм построения ДНФ (и КНФ) по таблице истинности. Определение булевых схем, реализующих булевы функции, через последовательности присваиваний и графов (стандартный базис). Задание функции булевой схемой (последовательностью присваиваний). Формулы — схемы специального вида. Общее определение схем (для произвольного базиса). Базис — полный базис. Монотонные функции: неполнота монотонного базиса $\{\wedge, \vee\}$, связь с множествами (монотонность по включению), раскраска булева куба, монотонных булевых функций от $2n$ переменных не меньше чем $2^{\frac{2^{2n}}{2n+1}}$. Многочлены Жегалкина. Классы Поста: $T_0$ — функции, сохраняющие ноль; $T_1$ — функции, сохраняющие единицу; $M$ — монотонные функции; $L$ — линейные функции; $S$ — самодвойственные функции. Формулировка теоремы Поста.

### 13. Производящие функции. Определения и примеры.

Производящая функция бинома Ньютона.

- Сила дифференцирования: $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.
- $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$. Отсюда следует

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}.$$

- Свойства, нужные для математического анализа (экспонента растёт быстрее полинома и т.п.).
- $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Применение для решения комбинаторных задач. Задача Муавра. Задача о счастливых билетах. Найти число целочисленных решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ 4 \leqslant x_1 \leqslant 15, \\ 9 \leqslant x_2 \leqslant 18, \\ 5 \leqslant x_3 \leqslant 16. \end{cases}$$

Число разбиений $n$ на различные слагаемые совпадает с числом разбиений $n$ на нечётные слагаемые. Свёртки. Пример использования для вычисления производящей функции последовательности $a_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Задача о числе беспорядков.

Вычисления с помощью производящих функций. Числа Фибоначчи. Числа Каталана. *Общий метод для линейно-рекуррентных последовательностей. Многочлены $P_k(x) = \binom{x}{k}$. Любой многочлен с целыми коэффициентами представим в виде целой линейной комбинации (ц.л.к.) многочленов $P_k(x)$.

Числа Стирлинга первого рода (без знака) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

$$[x]_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Числа Стирлинга второго рода $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$. Основные тождества:

- $x^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} [x]_k$;
- $\sum\limits_{k \geqslant 1} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} = \sum\limits_{k \geqslant 1} (-1)^{n-k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \delta_{n,m}$, где

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{при } n = m; \\ 0, & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

Числа Белла $B_n$.

# Список литературы


1. Лекции по дискретной математике / М. Вялый, В. Подольский, А. Рубцов, Д. Шварц, А. Шень. — ИД НИУ ВШЭ. Черновик: https://publications.hse.ru/mirror/pubs/share/direct/393719078.pdf, 2021.
2. *Журавлёв Ю. И., Флёров Ю. А., Федько О. С.* Дискретный Анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов. — М.: МФТИ, 2012.
3. *Lehman E., Leighton F. T., Meyer A. R.* Mathematics for Computer Science. — United Kingdom : Samurai Media Limited, 2017. — URL: https://courses.csail.mit.edu/6.042/spring17/mcs.pdf.
4. *Lovasz L., Vesztergombi K.* Discrete Mathematics. Lecture Notes, Yale University. — 1999. — URL: http://www.cs.elte.hu/~lovasz/dmbook.ps.
5. *Зуев Ю.* По океану дискретной математике: От перечислительной комбинаторики до современной криптографии. Т.1: Основные структуры. Методы перечисления. Булевы функции. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.
6. *Зуев Ю.* По океану дискретной математике: От перечислительной комбинаторики до современной криптографии. Т.2: Графы. Алгоритмы. Коды, блоксхемы, шифры. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.
7. *Яблонский С.* Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2003.
8. *Дистель Р.* Теория графов. — Новосибирск: Институт математики, 2002.
9. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Математические основы информатики. — Вильямс, 2010.
10. *Харари Ф.* Теория графов. Изд. 2-е. — М.: Эдиториал УРРС, 2003.
11. *Андерсон Д. А.* Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Вильямс, 2003.
12. Сборник задач по дискретному анализу. Комбинаторика. Элементы алгебры логики. Теория графов / Ю. И. Журавлёв, Ю. А. Флёров, О. С. Федько, Т. М. Дадашев. — М.: МФТИ, 2004.
13. *Sipser M.* Introduction to the Theory of Computation. — Third. — Boston, MA : Course Technology, 2013. — ISBN 113318779X.

14. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику: — УРСС, 2010. — ISBN 9785397013871.

15. *Биркгоф Г.*, *Барти Т.* Современная прикладная алгебра. — Издательство "Мир", 1976.

# Правила оценивания

**ФРКТ.** Студенты ФРКТ либо получают в качестве оценки за курс автомат семинариста, либо идут на экзамен, отказываясь от оценки автоматом.

Для студентов ФПМИ действует следующая БРС. В течение семестра будет две контрольных, по их результатам и результатам работы в семестре студенты могут получить оценку автоматом. В случае если студент идёт на экзамен, итоговая оценка формируется как полусумма от оценки автоматом и оценки за экзамен. Внимание! В случае, если нам придётся внезапо перейти на онлайн-обучение, эта система оценивания будет скорректирована.

Оценка за курс выставляется по следующим формулам:

$$O_{\textbf{авт.}} = 0,3 \times O_{\textbf{к.р.1}} + 0,4 \times O_{\textbf{к.р.2}} + 0,3 \times O_{\textbf{сем.}};$$

$$O_{\textbf{итог.}} = \frac{1}{2} O_{\textbf{авт.}} + \frac{1}{2} O_{\textbf{экз.}},$$

в которых

- $O_{\textbf{авт.}}$ — оценка, которую студент может получить автоматом,
- $O_{\textbf{к.р. 1}}$ и $O_{\textbf{к.р. 2}}$ — оценки за семестровые контрольные работы,
- $O_{\textbf{сем.}}$ — оценка за работу в семестре (выставляется по правилам семинариста),
- $O_{\textbf{итог.}}$ — итоговая оценка за курс,
- $O_{\textbf{экз.}}$ — оценка за экзамен.

Все оценки выставляются по десятибалльной системе, но являются дробными с точностью до сотых. При выставлении оценки в ведомость происходит арифметическое округление. Студент может получить в качестве итоговой оценки за курс оценку $O_{\textbf{авт.}}$ при условии, что средняя оценка за семестровые контрольные удовлетворительная (без округления), т. е. $\frac{1}{2}(O_{\textbf{к.р. 1}} + O_{\textbf{к.р. 2}}) \geqslant 3$, и оценка за работу в семестре хотя бы удовлетворительная $O_{\textbf{сем.}} \geqslant 3$; в случае $O_{\textbf{сем.}} < 3$ и $\frac{1}{2}(O_{\textbf{к.р. 1}} + O_{\textbf{к.р. 2}}) \geqslant 3$ получение оценки автоматом возможно только с разрешения семинариста. Перед получением оценки автоматом возможен лекторский контроль (беседа с лектором по материалам курса), по результатам которого оценка может быть понижена. Студент может отказаться от получения пониженной оценки и пойти на экзамен; при этом в формулу оценивания будет входить оценка $O_{\textbf{авт.}}$ без понижения. Как правило лекторский контроль проходит в случае существенной разницы между оценками в формуле, но бывают и нестандартные случаи, из-за которых правило попадания на лекторский контроль не формализовано. Помимо этого, если студент хочет получить автоматом удовлетворительную оценку, то он может сделать это только с разрешения семинариста.

Решая идти на экзамен, студент отказывается засчитать оценку $O_{\textbf{авт.}}$ в качестве итоговой оценки за курс и получит оценку $O_{\textbf{итог.}}$.

Экзамен начнётся с небольшого теста, непрохождение которого влечёт неудовлетворительную оценку и пересдачу. После прохождения теста будет беседа на основе билета с вопросами на определения, доказательства и с задачами. В случае, если по формуле $O_{\textbf{итог.}} < 3$, а $O_{\textbf{экз.}} \geqslant 3$, экзаменатор имеет право (но не обязан!) поставить за курс студенту оценку «удовлетворительно (3)».

Первая пересдача проходит в формате экзамена, при этом оценка за курс выставляется по формуле $0.8 \times O_{\textbf{итог.}}$, если $O_{\textbf{итог.}} \geqslant 4$. Вторая пересдача (комиссии) проходит в упрощённом формате: тест и беседа по тесту. Оценка за вторую пересдачу может быть либо удовлетворительной, либо неудовлетворительной.

## Пропуски контрольных

Если студент пропустил по уважительной причине (болезни) одну из семестровых контрольных, то оценка $O_{\textbf{авт.}}$ рассчитывается как полусумма из оставшейся контрольной и оценки за работу в семестре. В случае пропуска по уважительной причине двух контрольных, студент обязан идти на экзамен. Итоговая оценка в этом случае выставляется как $O_{\textbf{итог.}} = \frac{1}{2}O_{\textbf{сем.}} + \frac{1}{2}O_{\textbf{экз.}}$. Для подтверждения пропуска по уважительной причине будет необходимо предоставить допуск из деканата.

# Задачи для семинаров и домашнее задание

Задачи для семинарских занятий, приведённые в этом разделе разбиты по неделям (как и домашнее задание). Семинарист в праве отклоняться от предложенного здесь плана семинаров по своему усмотрению.

Задачи, помеченные «$\circ$», рекомендуется разобрать на семинаре.

Все решения должны быть обоснованы! В случае отсутствия обоснований задача оценивается как решённая неверно.

# 1 Алгебра логики: введение

**1.** Для какого слова **ложно** высказывание

«Первая буква слова гласная $\to$ ( Вторая буква слова гласная $\vee$ Последняя буква слова гласная)»?

1) жара; 2) орда; 3) огород; 4) парад.

**2°.** Докажите, что **а)** $x \to y = \bar{x} \vee y$; **б)** $x \wedge y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ **в)** $\overline{x \to y} = x \wedge \bar{y}$.

**3.** Найдите для формулы $(x \wedge z) \vee (x \wedge \neg z) \vee \neg(\neg x \to \neg y)$ равносильную формулу (среди формул ниже), преобразовав первую.

а) 1; б) $x \wedge (z \vee y)$; в) $x \vee y$; г) $y$.

**4.** Докажите дистрибутивность дизъюнкции относительно эквивалентности:

$$x \vee (y \leftrightarrow z) = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z).$$

**5.** Булева функция $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ возвращает 1 тогда и только тогда, когда хотя бы две переменные из трёх равны 1. Выразите $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ через булеву формулу.

**6.** Докажите следующие формулы разложений (Шеннона и Рида):

**а)** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\bar{x}_1 \wedge f(0, x_2, \ldots, x_n)) \vee (x_1 \wedge f(1, x_2, \ldots, x_n))$;

**б)** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ((1 \oplus x_1) \wedge f(0, x_2, \ldots, x_n)) \oplus (x_1 \wedge f(1, x_2, \ldots, x_n))$.

**7°.** Булева функция задана вектором значений: $f(x_1, x_2, x_3) = 10100101$.

1. Опишите $f$ через таблицу истинности.

2. Какие переменные $f$ являются **а)** существенными; **б)** фиктивными?

3. Опишите $f$ через булеву формулу.

**8.** Булева функция $f$ задана формулой. Выразите $f$ через таблицу истинности и формулу с операциями $\wedge, \vee, \neg$ (в стандартном базисе):

**а)** $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2)$;

**б)** $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$.

**9.** Докажите, что не существует булевой функции $f(x, y)$, существенно зависящей от обеих переменных, такой что

$$\overline{f(x, y)} = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

**10*.** Докажите, что любое тождество вида $A = B$, где $A$ и $B$ — булевы формулы со связками $\wedge, \vee, \neg$, останется верным, если в нём все конъюнкции заменить на дизъюнкции, а дизъюнкции заменить на конъюнкции.

**11*.** Постройте такую логическую связку (булеву функцию от двух переменных), что любая булева функция выразима в виде формулы с этой связкой.

## Домашнее задание

Во всех домашних работах требуются обоснованные решения!

**1.** $x, y, z$ – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(x = y) \wedge ((y < x) \to (2z > x)) \wedge ((x < y) \to (x > 2z))$$

Чему равно $x$, если $z = 7, y = 16$?

**2.** Постройте таблицу истинности для функции $\neg((x \wedge \neg y) \wedge z)$.

**3.** Докажите, что

$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 = (x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1).$$

**4.** Выполняется ли дистрибутивность для следующих операций:

**а)** $x \wedge (y \to z) \stackrel{?}{=} (x \wedge y) \to (x \wedge z)$; **б)** $x \oplus (y \leftrightarrow z) \stackrel{?}{=} (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$.

**5.** Выполняется ли для импликации **а)** коммутативность;

**б)** ассоциативность, т. е. $(x \to y) \to z \stackrel{?}{=} x \to (y \to z)$?

**6.** Указать существенные и несущественные (фиктивные) переменные следующих функций:

**а)** $f(x_1, x_2, x_3) = 00111100$;  **б)** $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3$.

**7.** Докажите формулу разложения:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n)) \wedge (\neg x_1 \vee f(1, x_2, \ldots, x_n)).$$

**8.** Обозначим через $x^1 = x$ и $x^0 = \neg x$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — набор из нулей и единиц. Докажите, что функция $x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}$ истинна ровно на одном входном наборе: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

**9.** Докажите формулу $\bigvee\limits_{i,j}(x_i \oplus x_j) = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n)$ (дизъюнкция в левой части берётся по всем $i$ и $j$: $(x_1 \oplus x_2) \vee (x_2 \oplus x_3) \vee \ldots$).

**10*.** Докажите, что существует булева функция, которую нельзя выразить формулой со связками $\wedge$ и $\vee$.

# 2 Множества и логика

**1°.** Юниверсум — натуральные числа ($U = \mathbb{N}_0$). Опишите неформально на русском языке множества, заданные формулами:

**а)** $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$;  **б)** $\{n \mid n = 2m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}_0\}$;

**в)** $\{n \mid (\exists m : n = 2m) \wedge (\exists k : n = 3k)\}$.

**2°.** Множество $A$ задано формулой ($U = \mathbb{N}_0$):

$$A = \{n \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = k^2\}.$$

Верно ли, что $A = \{1,\ 4,\ 9\}$?

**3°.** Опишите формально множества ($U = \mathbb{Z}$):

**а)** Множество, состоящее из чисел $1, 10$ и $100$.

**б)** Множество, состоящее из чисел, больших 5.

**в)** Множество, состоящее из натуральных чисел, меньших 5.

**г)** Множество, которое не содержит элементов.

**4°.** Докажите, что для любых множеств $A$, $B$, $C$ выполняются равенства

**а)** $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; **б)** $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

**в)** $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$; **г)** $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

**Комментарий:** *Используйте при решении как диаграммы Эйлера-Венна, так и переход к формулам алгебры логики.*

**5.** На числовой прямой даны два отрезка: $P = [2, 10]$ и $Q = [6, 14]$. Выберите такой отрезок $A$, что формула

$$((x \in A) \to (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной $x$.

1) $[0, 3]$ 2) $[3, 11]$ 3) $[11, 15]$ 4) $[15, 17]$

**6.** Про множества $A$, $B$, $C$ известно, что $A \cap B \subseteq C \setminus (A \cup B)$. Верно ли, что тогда $A \subseteq A \triangle B$?

**7.** Докажите включение

$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \cup \cdots \cup (A_n \triangle B_n)$$

для любых множеств $A_i$, $B_i$.

**8.** Докажите равенство

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = (A_1 \setminus B_1) \cap (A_2 \setminus B_2) \cap \cdots \cap (A_n \setminus B_n)$$

для любых множеств $A_i$, $B_i$.

## Домашнее задание

**1.** Верно ли, что для любых множеств $A$ и $B$ выполняется равенство $(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B$?

**2.** Верно ли, что для любых множеств $A$, $B$ и $C$ выполняется равенство

$$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)?$$

**3.** Верно ли, что для любых множеств $A$, $B$ и $C$ выполняется равенство $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$?

**4.** Верно ли, что для любых множеств $A$ и $B$ выполняется включение $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B$?

**5.** Пусть $P = [10, 40]; Q = [20, 30]$; известно, что отрезок $A$ удовлетворяет соотношению

$$((x \in A) \to (x \in P)) \wedge ((x \in Q) \to (x \in A)).$$

1. Найдите отрезок $A$ максимально возможной длины.

2. Найдите отрезок $A$ минимально возможной длины.

**6.** Про множества $A, B, X, Y$ известно, что $A \cap X = B \cap X$, $A \cup Y = B \cup Y$. Верно ли, что тогда выполняется равенство $A \cup (Y \setminus X) = B \cup (Y \setminus X)$?

**7.** Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ — невозрастающая последовательность множеств. Известно, что $A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$. Докажите, что $A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$.

**8.** Пусть $A$, $B$, $C$, $D$ — такие отрезки прямой, что $A \triangle B = C \triangle D$ (симметрические разности равны). Верно ли, что выполняется включение $A \cap B \subseteq C$?

# 3 Математические определения, утверждения и доказательства

**1.** Известно, что истинны утверждения $A \vee (B \wedge \neg C)$ и $\neg A \wedge (B \vee C)$. Какие из утверждений $A$, $B$, $C$ истинны, а какие ложны?

**2.** Докажите, используя контрапозицию, что если $ab$ не делится на $n$, то $a$ не делится на $n$ и $b$ не делится на $n$. Здесь $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

**3.** Докажите, что если $a \times b = c$, то хотя бы одно из чисел $a$, $b$ не превосходит $\sqrt{c}$; здесь $a, b, c$ — положительные вещественные числа.

**4.** Верно ли утверждение:

**а)** Существуют различные положительные целые числа $m$ и $n$, такие что $m < n$ и $n^2$ кратно $m$, но $n$ не кратно $m$;

**б)** Произведение рационального и иррационального числа — иррациональное число?

**5.** Докажите, что число $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ иррационально.
**Указание:** $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

**6.** Докажите, что для любого целого положительного $n$ выполняется

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

**7.** Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2022 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

**8.** На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

1. заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);

2. заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что после нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из 100 нулей и единиц.

**9.** Какое из утверждений сильнее:

$$\forall x \; \exists y : P(x, y) \qquad \text{или} \qquad \exists y \; \forall x : P(x, y)?$$

**10.** Из целых чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

**11.** На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

**12*.** Лабиринтом называется клетчатый квадрат $10 \times 10$, некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?

**13.** Убедитесь в истинности утверждения (при произвольных $A$ и $B$):

$$(A \to B) \vee (B \to A). \tag{1}$$

Зафиксируем произвольную параболу. Пусть $A$ — утверждение «ветви параболы направлены вверх», а $B =$«парабола пересекает 0 (прямую $y = 0$)». Проследите за следующими рассуждениями. Утверждение «если ветви параболы направлены вверх, то парабола пересекает 0», очевидно, ложно; тогда истинным должно быть утверждение «если парабола пересекает 0, то ветви параболы направлены вверх», но оно также ложно. То есть оба утверждения в дизъюнкции (1) ложны (при некотором выборе утверждений $A$ и $B$), но сама дизъюнкция истинна! Найдите ошибку в рассуждениях.

## Домашнее задание

**1.** Найдите ошибку в доказательстве утверждения «Если $A \subseteq (B \cup C)$, то $A \subseteq B$ или $A \subseteq C$».

1) запишем утверждения для каждого элемента юниверсума:

$$(x \in A) \to x \in (B \cup C);$$

2) раскрываем объединение и переписываем импликацию:

$$(x \notin A) \vee (x \in B) \vee (x \in C);$$

3) дублируем первую скобку и перегруппировываем члены:

$$((x \notin A) \vee (x \in B)) \vee ((x \notin A) \vee (x \in C));$$

4) переходим от дизъюнкций к импликациям:

$$((x \in A) \to (x \in B)) \vee ((x \in A) \to (x \in C));$$

5) переходим обратно к записи в множествах: $A \subseteq B$ или $A \subseteq C$.

**2.** В доме живут $A$, его жена $B$ и их дети $C, D, E$, при этом справедливы следующие утверждения:

1) если $A$ смотрит телевизор, то и $B$ смотрит телевизор;

2) хотя бы один из $D$ и $E$ смотрит телевизор;

3) ровно один из $B$ и $C$ смотрит телевизор;

4) $C$ и $D$ либо оба смотрят, либо оба не смотрят телевизор;

5) если $E$ смотрит телевизор, то $A$ и $D$ тоже смотрят телевизор.

Кто смотрит и кто не смотрит телевизор?

**3.** Докажите, используя контрапозицию, что если $x^2 - 6x + 5$ чётно, то $x$ нечётно; здесь $x \in \mathbb{Z}$.

**4.** Докажите, что произведение положительного рационального числа и иррационального числа — иррациональное число.

**5.** Про непустые попарно несовпадающие множества $A$, $B$ и $C$ известно, что $C \setminus A \subseteq B$ и $C \setminus B \subseteq A$. Возможно ли, что $B = A \cap C$?

**6.** Докажите равенства

**а)** $1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1) \cdot 1 = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$ ;

**б)** $\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{2}$ .

**7.** В зачете участвовало несколько студентов и преподавателей. Известно, что в комнату, где происходил зачет, каждый участник зачета вошел лишь однажды и что каждый преподаватель поговорил с каждым студентом. Докажите, что в какой-то момент зачета в комнате присутствовали либо все студенты (и, может быть, кто-то из преподавателей), либо все преподаватели (и, может быть, кто-то из студентов).

**8.** Найдите ошибку в доказательстве по индукции утверждения «все лошади одного цвета», точнее $A(n) =$«любые $n$ лошадей одного цвета». База, $A(1)$, очевидна: одна лошадь одного цвета. Шаг, $A(n) \to A(n+1)$: уберём одну лошадь из $n+1$ и воспользуемся предложением $A(n)$ — получим, что оставшиеся $n$ лошадей одного цвета. Вернём теперь убранную лошадь, уберём другую лошадь и опять воспользуемся предложением $A(n)$ — опять получим, что выбранные $n$ лошадей одного цвета, а значит и убранная в начале лошадь того же цвета, что и все остальные. Итак, мы доказали, что любая $n+1$ лошадь одного цвета.

**9.** В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трех цветов, по $n$ штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

**10***. Докажите, что каждое число $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}$, где $a_i \in \mathbb{N}$ не квадраты целых чисел, иррационально.

# 4 Графы I. Неориентированные графы

**О терминологии.** Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф $A$ графа $B$» ($A \subseteq B$) означает, что граф $A$ можно получить из графа $B$ удалением части вершин и рёбер.

*Граф–путь* $P_n$ имеет $n+1$ вершину $v_0$, $v_1$, $\ldots v_n$. Рёбрами связаны пары вершин $v_i$ и $v_{i+1}$ ($0 \leqslant n-1$). Таким образом, в графе–пути $n$ рёбер. Говорят, что *длина* пути равна $n$. *Граф-цикл* $C_n$ имеет $n$ вершин $v_1, \ldots, v_n$, $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leqslant i < n\} \cup \{v_n, v_1\}$. *Полный граф* $K_n(V, E)$ имеет $n$ вершин, каждая пара которых соединена ребром: $E = \binom{V}{2}$.

**1.** Найдите число рёбер в полном графе $K_n$.

**2.** Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

**3.** В графе 100 вершин и 800 рёбер.

**а)** Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.

**б)** Может ли так случиться, что все вершины этого графа имеют степень 16?

*Дополнением* $\bar{G}$ графа $G$ называется такой граф на том же множестве вершин, что и у графа $G$, в котором пара вершин связана ребром тогда и только тогда, когда в $G$ эта пара вершин ребром не связана.

**4.** Докажите, что граф содержит клику на $n$ вершинах тогда и только тогда, когда его дополнение содержит независимое множество на $n$ вершинах.

**5.** Докажите, что если $H_1$ и $H_2$ — связные подграфы графа $G$, такие что $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, то подграф $H_1 \cup H_2$ связен.

**6.** Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

**7.** Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с $n$ вершинами?

**8.** Каждая вершина графа $G$ имеет степень 2. Докажите, что $G = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m$, где $H_i$ — граф цикл, и $H_i \cap H_j = \varnothing$.

Подграф $G[U] = \Big(U,\, \binom{U}{2} \cap E(G)\Big)$ графа $G$ называют *индуцированным* (множеством $U \subseteq V$).

**9.** Докажите, что вершины связного графа $G$ можно упорядочить так, что для каждого $i$, $1 \leqslant i \leqslant |V(G)|$, индуцированный подграф $G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ будет связным.

**10.** Про граф известно, что в нём 1000 вершин и 2022 ребра. Верно ли, что в таком графе может не оказаться ни одного пути длины 64?

## Домашнее задание

**1.** Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

**2.** В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?

**3.** Найдите все графы, в которых каждая пара рёбер имеет общий конец.

**4.** В графе на 400 вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть цикл длины 3.

**5.** Верно ли что, если $H_1$ и $H_2$ — связные подграфы графа $G$, такие что $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, то подграф $H_1 \cap H_2$ связен?

**6.** В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

**7.** Сформулируйте следующее утверждение на языке теории графов и докажите его. На каждой лекции есть два студента, которые знакомы с одинаковом числом студентов (знакомство считается взаимным, если на лекцию пришёл один студент или никто не пришёл — она отменяется).

**8.** Найдите все графы-пути и графы-циклы, дополнение которых граф-путь или граф-цикл.

# 5 Графы II. Деревья и раскраски

**О терминологии.** Раскраска вершин графа называется *правильной*, если концы каждого ребра покрашены в разные цвета.
*Расстоянием* $\rho(u,v)$ между двумя вершинами $u$ и $v$ в связном графе называют длину кратчайшего пути между ними. *Диаметром* графа $G$ называют число $\mathrm{diam}(G) = \max\limits_{u,v\in V} \rho(u,v)$, а также путь такой длины. Вершина $v$ называется *центром* графа, если максимальное расстояние от неё до любой другой вершины минимально; это расстояние называют *радиусом* $\mathrm{rad}(G) = \min\limits_{v\in V} \max\limits_{u\in V} \rho(u,v)$.

**1.** Дерево имеет 2022 вершины. Верно ли, что в нём найдется путь длины 3?

**2.** Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?

**3.** В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т. е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

*Остовным деревом* называют подграф графа, который является деревом на всех вершинах исходного графа.

**4.** Докажите, что любой связный граф имеет остовное дерево

**5.** Про граф известно, что в нём 1000 вершин и 2022 ребра. Верно ли, что

**а)** в таком графе обязательно есть маршрут длины 3000;

**б)** в таком графе может не оказаться ни одного пути длины 64?

**6.** Докажите или опровергните следующие утверждения:

**а)** если в графе есть замкнутый маршрут чётной длины, то в графе есть цикл чётной длины.

**б)** если в графе есть замкнутый маршрут нечётной длины, то в графе есть цикл нечётной длины.

**7.** 1. Докажите, что любое дерево 2-раскрашиваемо (существует правильная раскраска в 2 цвета).

2. Сколько есть правильных 2-раскрасок у дерева?

**8.** Докажите, что если $G$ содержит клику размера $n$, то его вершины нельзя раскрасить правильно в $n-1$ цветов.

**9.** Имеется связный граф. Докажите, что в нём можно выбрать одну из вершин так, чтобы после её удаления вместе со всеми ведущими из неё рёбрами останется связный граф.

**10.** 1. Докажите, что $\mathrm{rad}(G) \leqslant \mathrm{diam}(G) \leqslant 2\mathrm{rad}(G)$.

2. Приведите пример графа $G$, для которого $\mathrm{rad}(G) = \mathrm{diam}(G)$.

## Домашнее задание

**1.** Степень каждой вершины графа равна 2. Верно ли, что этот граф 2-раскрашиваемый?

**2.** Докажите, что в дереве на $2n$ вершинах есть независимое множество размера $n$ (ни одна пара вершин множества не соединена ребром).

**3.** В дереве на 2022 вершинах ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?

**4.** Существуют ли два дерева с одинаковым числом вершин $n$ и одинаковыми диаметрами $d$, такие что можно добавить ребро между вершинами этих деревьев, чтобы длина диаметра полученного дерева равнялась $d$?

**5.** Докажите, что если степень каждой вершины графа не превосходит $d$, то его можно правильно раскрасить в $d+1$ цвет.

**6.** Назовем не 2-раскрашиваемый граф минимальным, если после удаления любого ребра он становится 2-раскрашиваемым. Докажите, что в минимальном не 2-раскрашиваемом графе на 1000 вершинах есть хотя бы одна изолированная вершина (т. е. вершина степени 0).

**7.** Пусть $G$ — связный граф, который не является графом-путём и $|V(G)| > 3$. Докажите, что в $G$ есть три вершины $v_1, v_2, v_3$, в результате удаления которых вместе со всеми смежными рёбрами, получается связный граф $G' = G[V \setminus \{v_1, v_2, v_3\}]$.

**8.** Граф получен из графа-цикла $C_{2n}$, $n \geqslant 2$ добавлением рёбер, соединяющих противоположные вершины ($v_1$ соединена с $v_{n+1}$, $v_2$ с $v_{n+2}$ и т.д.). При каких $n$ получившийся граф правильно раскрашиваемый

**а)** в два цвета; **б)** в три цвета?

**9.** В графе на 100 вершинах, каждая из которых имеет степень 3, есть ровно 600 путей длины 3. Сколько в этом графе циклов длины 3?

**10*.** Докажите, что если размер максимальной клики в графе четный, то можно раскрасить вершины графа в два цвета так, что размеры максимальных клик в подграфах обоих цветов равны (подграф индуцирован множеством вершин одного цвета).

# 6 Двудольные графы, паросочетания и функции

**Напоминание:** *Не обязательно всюду определённые функции мы называем* частичными функциями, *а всюду определённые функции —* отображениями *или* тотальными функциями. *Обозначение $f : A \to B$ означает, что множество $A$ — область определения функции $f$, т. е. $f$ — отображение из $A$ в $B$.*

**1.** Частичная функция $f$ из множества $\{1, 2, \ldots, 8\}$ в множество $\{a, b, \ldots, e\}$ определена следующим образом:

$$f : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto a, \quad 3 \mapsto c, \quad 4 \mapsto d, \quad 5 \mapsto c, \quad 7 \mapsto d.$$

Найдите **а)** $\mathrm{Dom}(f)$; **б)** $\mathrm{Range}(f)$; **в)** $f(\{1, 2, 3\})$;

**г)** $f^{-1}(c)$; **д)** $f(\{1, 2, 3, 5, 6\})$; **е)** $f^{-1}(\{a, b, c\})$.

**2.** Частичная функция $g$ из множества положительных целых чисел в множество положительных целых чисел сопоставляет числу $x$ наибольший простой делитель $x$.

**а)** Какова область определения $g$?

**б)** Верно ли, что если $X$ — конечное, то и $g^{-1}(X)$ конечное?

**в)** Найдите $g^{-1}(3)$.

**3°.** Пусть $f$ — частичная функция из множества $A$ в множество $B$, $X, Y \subseteq A$, $U, V \subseteq B$. Верны ли для любых множеств $f$, $A$, $B$, $X$, $Y$, $U$, $V$ следующие утверждения:

**а)** $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

**б)** из равенства $f(X) = f(Y)$ следует $X \cap Y \neq \varnothing$;

**в)** $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;

**г)** из равенства $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ следует $U = V$.

**4°.** Частичная функция $f$ определена на множестве $X$ и принимает значения в множестве $Y$, при этом $B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение «$f(f^{-1}(B))$ ? $B$» стало верным?

**5°.** Пусть $A$ и $B$ — два множества. Покажите равносильность свойств «существует отображение $f\colon A \to B$, являющееся инъекцией» и «существует отображение $f\colon B \to A$, являющееся сюръекцией».

**6.** Приведите пример сюръекции множества положительных целых чисел на себя, для которой прообраз любого 1-элементного множества бесконечен.

Паросочетание *покрывает* вершину графа, если оно содержит ребро, смежное этой вершине.

**7*.** Дан двудольный граф $G(A \cup B, E)$. В $G$ есть два паросочетания. Докажите, что есть третье, которое покрывает все вершины первого паросочетания из доли $A$ и все вершины второго паросочетания из доли $B$.

**8*.** В каждой клетке доски $n \times n$ написано неотрицательное вещественное число таким образом, что суммы в каждой горизонтали и вертикали равны 1. Докажите, что можно расставить $n$ небьющих друг друга ладей так, что стоящие под ними числа будут ненулевыми.

## Домашнее задание

**1.** Частичная функция $h$ из множества $\{0, 1, \ldots, 8\}$ в множество $\{a, b, \ldots, g\}$ определена следующим образом:

$$h: 1 \mapsto b, \quad 2 \mapsto c, \quad 3 \mapsto b, \quad 4 \mapsto e, \quad 5 \mapsto b, \quad 6 \mapsto e, \quad 8 \mapsto f.$$

Найдите **а)** $\mathrm{Dom}(h)$; **б)** $\mathrm{Range}(h)$; **в)** $h(\{0, 1, 2, 3, 4\})$; **г)** $h^{-1}(\{a, b, c\})$; **д)** $h^{-1}(h(\{0, 1, 2, 6, 7, 8\}))$; **е)** $h(h^{-1}(\{a, b, c, d, e\}))$.

**2.** Частичная функция $f$ из множества целых чисел в множество целых чисел сопоставляет числу $x$ наименьшее простое число, которое больше $x^2$. Докажите, что если множество целых чисел $X$ конечное, то и полный прообраз этого множества $f^{-1}(X)$ конечен.

*При решении следующих задач приведите контрпример, когда включение не выполняется.*

**3.** Пусть $f$ — частичная функция из множества $X$ в множество $Y$, при этом $A \subseteq X$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f^{-1}(f(A)) \ ?\ A$$

стало верным? (Возможные знаки сравнения в этой и двух следующих задачах: $\subseteq$, $\supseteq$, $=$. Нужно учесть все варианты.)

**4.** Пусть $f$ — частичная функция из множества $A \cup B$ в множество $Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f(A \setminus B) \ ?\ f(A) \setminus f(B)$$

стало верным?

**5.** Пусть $f$ — частичная функция из множества $X$ в множество $Y$, при этом $A \cup B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f^{-1}(A \setminus B) \ ?\ f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

стало верным?

Напомним, что *паросочетанием* (в произвольном) графе называется множество рёбер, не имеющих общих концов; паросочетание называется *совершенным*, если каждая вершина графа принадлежит некоторому ребру паросочетания.

**6.** Верно ли, что если каждая вершина графа имеет степень 1 или 2 и в графе нет (простых) циклов нечётной длины, то в графе есть совершенное паросочетание?

**7.** Про частичную функция $f$ из множества $X$ в множество $Y$ и множество $B \subseteq Y$ известно, что $f^{-1}(B) = X$. Верно ли, что $B = Y$?

**8.** Приведите пример такой инъекции $f$ из множества $X$ в множество $Y$, что для некоторого $B \subseteq Y$ выполняются оба условия

$$\begin{cases} B \neq \varnothing, \\ f^{-1}(B) = \varnothing. \end{cases}$$

**9.** Постройте биекцию между конечными подмножествами множества положительных целых чисел и конечными строго возрастающими последовательностями положительных целых чисел.

*Вершинным покрытием* графа $G$ называется подмножество вершин $U \subseteq V$, такое что хотя бы один конец каждого ребра $G$ лежит в $U$.

**10*.** (Теорема Кёнига) Докажите, что размер максимального паросочетания (число рёбер) в двудольном графе $G$ совпадает с размером его минимального вершинного покрытия.

**11*.** В прямоугольнике $m \times n$ стоят фишки $m$ разных цветов, по $n$ штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

# 7 Комбинаторика I. Правила суммы и произведения

**1.** Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов.

**а)** Сколькими способами можно составить букет из цветов одного вида?

**б)** Сколькими способами из них можно составить букет, в котором нечётное количество цветов каждого вида?

**в)** Сколькими способами можно составить букет, используя любые из имеющихся цветов?

(Цветы одного сорта считаем одинаковыми, количество цветов в букете не ограничено, но не равно 0.)

**2.** На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

**3.** Сколько существует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая меньше предыдущей)?

**4.** Найдите вероятность того, что в случайном 4-буквенном слове в русском алфавите, есть хотя бы одна гласная? (Всего 33 буквы, 10 из них гласные.)

**Комментарий:** *Под вероятностью мы понимаем отношение количества всех исходов, удовлетворяющих событию, к количеству всевозможных исходов.*

**5.** Докажите, что двоичных последовательностей (слов) длины $n$, в которых ровно $k$ единиц столько же, сколько и подмножеств размера $k$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

**6.** Лестница состоит из 13 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через некоторые ступеньки (можно даже через все). Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

*Семейством* (множеств) называется множества, элементами которого являются множество. *Разбиением* множества $A$ на подмножества называется семейство $\mathcal{B}$, такое что $A = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$, $\forall B, B' \in \mathcal{B} : B \neq B' \Rightarrow B \cap B' = \varnothing$. То есть, разбиение множества $A$ — это семейство непустых попарно непересекающихся подмножеств, дающих в объединении $A$. Множества $B \in \mathcal{B}$ называют *блоками* разбиения $\mathcal{B}$.

**7°.** Чего больше, разбиений 20-элементного множества на 6 (непустых) подмножеств или его подмножеств размера 5?

**8°.** 10 человек случайно выстроились в очередь. Найдите вероятность того, что **а)** Иванов, Петров и Сидоров стоят подряд (в произвольном порядке); **б)** Иванов стоит раньше Петрова; **в)** Иванов и Петров не стоят друг за другом?

**9.** Сколькими способами можно образовать 6 пар из 12 человек?

**10.** Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

**11.** Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?

## Домашнее задание

*Напоминаем, что обоснование является важной частью решения задачи, в том числе и по комбинаторике. Только численные ответы (и заметки в духе «$12 = 3 \times 2 \times 2$ по правилу произведения») не считаются решениями и не будут оцениваться.*

**1.** Есть 6 кандидатов на 6 вакансий. Сколькими способами можно заполнить вакансии? (Каждая вакансия должна быть заполнена.)

**2. а)** Каких чисел больше среди первого миллиона (начиная с 0): тех,

в записи которых есть единица или тех, в записи которых её нет?

**б)** Тот же вопрос для первых 10 миллионов чисел.

**3.** Найдите вероятность того, что в десятичной записи случайного шестизначного числа, в записи будет хотя бы две одинаковые цифры?

**4.** Из 36-карточной колоды карт на стол равновероятно и случайно выкладывается последовательность из 4 карт. Какова вероятность того, что две из них красные, а две черные?

**5.** Сколько существует 6-значных чисел, в которых чётных и нечётных цифр поровну?

**6.** Сколько существует 7-значных чисел, в которых ровно две четные цифры и перед каждой четной цифрой обязательно стоит нечетная?

**7.** Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?

Вершинами *полного бинарного дерева ранга* $n$ являются двоичные слова длины не больше $n$ (включая *пустое слово* длины 0). Два слова соединены ребром в полном бинарном дереве, если одно получается из другого приписыванием одной цифры справа (нуля или единицы).

**8.** Найдите количество диаметров в полном бинарном дереве ранга $n$.

**9.** *Разбиением* числа $N$ на $k$ частей называется такая невозрастающая последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = N$. Чего больше, разбиений числа $N$ на не более чем $k$ слагаемых, или разбиений числа $N + k$ на ровно $k$ слагаемых?

**10.** Чего больше, правильных скобочных последовательностей из $n$ пар скобок или последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ с элементами $\pm 1$, таких что $\sum\limits_{i=1}^{2n} x_i = 0$?

# 8 Комбинаторика II. Биномиальные коэффициенты

**1.** Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски $1 \times 30$ и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

**а)** Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

**б)** Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

**2.** Найдите коэффициент при

**а)** $x^3y^7$ в разложении $(2x-y)^{10}$;

**б)** $x_1^3x_2x_4^5x_5$ в разложении $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$.

**3.** Докажите справедливость формул (желательно найти комбинаторное доказательство):

**а)** $\sum_{j=0}^{k}\binom{r}{j}\binom{s}{k-j}=\binom{r+s}{k}$; **б)** $\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1}$.

**4.** Найдите число решений уравнения $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$ в неотрицательных целых числах.

**5.** Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?

**6.** Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах

**а)** «КОМПЬЮТЕР»; **б)** «ЛИНИЯ»; **в)** «ПАРАБОЛА»;

**г)** «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ».

**7.** Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 15, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

**8.** Докажите, что

$$\binom{n+k+1}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}.$$

**9.** *Разложением* числа $n$ называется такая последовательность положительных целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, что $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$. Найдите количество разложений $n$ на нечетные слагаемые.

**10*.** Сколькими способами можно разрезать правильный $n$-угольник на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали?

## Домашнее задание

**1.** Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну координату на 1 или обе координаты на 2. Сколько есть способов переместить Робота из точки $(0,0)$ в точку $(4,5)$?

**2.** В магазине продается 10 видов пирожных. Сколькими способами можно купить 100 пирожных (порядок покупки не важен)?

**3.** Какое слагаемое в разложении $(1+2)^n$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

**4.** Найдите число слов длины $n$ над алфавитом $\{0,1\}$, в которых нет двух единиц подряд.

**5.** Дать комбинаторное доказательство тождества

**а)** $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$;

**б)** $\binom{n}{m} = \binom{n-2}{m} + 2\binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m-2}$.

**6.** Какое из чисел больше $\binom{F_{1000}}{F_{998}+1}$ или $\binom{F_{1000}}{F_{999}+1}$? Здесь $F_n$ — $n$-е число Фибоначчи.

**7.** Приведите комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant (n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$

**8.** Сколько способов разместить 20 различных книг на 5 полках, если каждая полка может вместить все 20 книг? Размещения, отличающиеся порядком книг на полках, считаются различными.

**9.** Студсовет из 8 человек выбирает из своего состава председателя путем тайного голосования. Каждый может отдать один голос за любого члена студсовета. Результат голосования – число голосов, отданных за каждого кандидата. Сколько существует различных результатов голосования?

**10.** Сколькими способами можно переставить буквы в слове «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ», так чтобы две буквы «О» не стояли рядом?

**11*.** Вы купили в магазине набор из 30 бусинок. Бусинки бывают 15 разных цветов, каждого цвета по две штуки. Сколькими способами можно составить, используя все бусинки, круглое ожерелье, если ожерелья, которые совмещаются вращением в пространстве, считать одинаковыми. Более формально, два ожерелья одинаковые, если одно можно совместить с другим так, чтобы они совпали.

# 9 Комбинаторика III. Формула включений-исключений

**1.** В группе 40 туристов. Из них 20 человек говорят по-английски, 15 — по-французски, 11 — по-испански. Английский и французский знают семь человек, английский и испанский — пятеро, французский и испанский — трое. Два туриста говорят на всех трёх языках. Сколько человек группы не знают ни одного из этих языков?

**2°.** В группе студентов есть один, который знает C++, Java, Python, Haskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

**3.** Пусть $X = \{1, \ldots, n\}$. Найдите число способов взять $k$ подмножеств $X_1, \ldots, X_k$ множества $X$ таких, что их пересечение пусто.

**4.** В стране пять городов: А, Б, В, Г и Д. Их хотят связать четырьмя авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

**5.** Функция неубывающая, если $x \leqslant y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$. Найдите количество **а)** неубывающих инъекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$;

**б)** неубывающих сюръекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$.

**6.** Найдите количество частичных функций $f$ из $\{1, \ldots, 7\}$ в $\{1, \ldots, 7\}$, таких что $f(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$ и $f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$ (на $f(7)$ и $f^{-1}(7)$ дополнительных ограничений нет). Ответом на вопрос задачи должно быть число в десятичной записи.

**7.** При изготовлении пирожные — колечки трех сортов: шоколадные, с корицей и с орехами — упаковываются в стандартные коробки по 18 колечек в каждой. Каждая коробка может содержать колечки всех видов. Порядок колечек в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не более 9, колечек с корицей не более 3, а ореховых не более 9?

**8°.** Сколько имеется различных булевых функций от $n$ переменных, принимающих значение 1 только на тех наборах, в которых содержится ровно $k$ единиц? (но не обязательно на всех таких наборах)

**9.** Функция Эйлера $\phi(n)$ возвращает количество положительных взаимнопростых с $n \geqslant 1$ чисел, непревосходящих $n$. Докажите формулу:

$$\phi(n) = n \times \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{p_r}\right),$$

в которой $p_1, \ldots, p_r$ — все различные простые делители числа $n > 1$.

**10.** Дан выпуклый $n$-угольник ($n \geqslant 5$). Сколькими способами можно выбрать в нём две непересекающиеся диагонали? Порядок выбора не важен.

**11.** Найдите значение булевой функции при всех значениях переменных:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_3 \wedge x_1).$$

**Загадка:** *причём тут формула включений-исключений?*

**12$^*$.** Чего больше: инъективных отображений 5-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 5-элементное?

## Домашнее задание

**1.** Сколькими способами можно закрасить клетки таблицы $3 \times 4$ так, чтобы незакрашенные клетки содержали или верхний ряд, или нижний ряд, или две средних вертикали?

**2.** Для полета на Марс набирают группу людей, в которой каждый должен владеть хотя бы одной из профессий повара, медика, пилота или астронома. При этом в техническом задании указано, что каждой профессией из списка должно владеть ровно 6 человек в группе. Кроме того указано, что в группе должен найтись ровно один человек, владеющий всеми этими профессиями; каждой парой профессий должны владеть ровно 4 человека; каждой тройкой — ровно 2.

Выполнимо ли такое техническое задание?

**3.** Пусть $A$ и $B$ — конечные непустые множества, и $|A| = n$. Известно, что число инъекций из $A$ в $B$ совпадает с числом сюръекций из $A$ в $B$. Чему равно это число?

**4.** Пусть $X = \{1, \ldots, n\}$. Найдите число способов взять $k$ подмножеств $X_1, \ldots, X_k$ множества $X$ таких, что $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_k$.

**5.** В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

**6.** Найдите количество неубывающих отображений

$$f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}.$$

**7.** Чего больше, разбиений $n$-элементного множества на не более чем $k$ подмножеств или разбиений $(n+k)$-элементного множества на ровно $k$ подмножеств? Определение разбиения приведено в классной работе 7.

**8.** Сколькими способами можно рассадить за круглым столом $n$ пар влюблённых так, чтобы ни одна пара влюблённых не сидела рядом.

**9.** Есть $n$ конфет и $m$ коробок. Найдите число способов разместить конфеты по коробкам для каждого из условий (все конфеты должны быть разложены): **а)** и конфеты и коробки разные; **б)** конфеты одинаковые, коробки разные, не должно быть пустых коробок; **в)** конфеты одинаковые, коробки разные; **г)** и конфеты и коробки разные, не должно быть пустых коробок; **д)** конфеты разные, коробки одинаковые, не должно быть пустых коробок; **е)** конфеты разные, коробки одинаковые.

Укажите тип отображения, соответствующий размещению, если это возможно.

**10*.** Докажите справедливость равенства с помощью метода характеристических функций:

$$|A_1 \triangle \ldots \triangle A_n| = \sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + 4 \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

## 10 Бинарные отношения и их графы. Отношения эквивалентности

Обозначения: $xPy$ сокращение для $(x, y) \in P$. По аналогии с отношениями типа «больше». $P^{-1}$ — обратное отношение, содержит такие пары $(x, y)$, что $(y, x) \in P$. $\overline{P}$ — дополнительное отношение, содержит пары, не содержащиеся в $P$. $\mathrm{id}_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ — «единичное» отношение на множестве $A$. Операция композиции $Q \circ P \subseteq X \times Z$ отношений $P \subseteq X \times Y$ и $Q \subseteq Y \times Z$ задана формулой:

$$Q \circ P = \{(x,z) \mid \exists y \in Y : (xPy) \wedge (yQz)\}.$$

Обратите внимание на порядок операндов, он выбран так, чтобы согласовываться с операцией композиции функций: композиция $f \circ g$ — это функция $f(g(x))$.

**1.** Нарисуйте двудольный граф соответсвующий бинарному отношению $R \subseteq \{a,b,c,d,e\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$:

$$R = \{(a,1),(a,2),(b,4),(c,3),(d,5)\}.$$

**а)** Является ли $R$ функцией? **б)** Является ли $R^{-1}$ функцией?

**2.** Ответьте на следующие вопросы для бинарного отношения $R \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$. Является ли $R$ рефлексивным? симметричным? транзитивным? отношением эквивалентности? Для каждого отношения $R$ нарисуйте соответствующий граф. Используйте неориентированный граф для симметричных бинарных отношений, в случае нерефлексивных бинарных отношений используйте петли.

**а)** $R = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$; **б)** $R = \{(1,2),(2,1),(1,1)\}$

**в)** $R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$; **г)** $R = \{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,3\}\}$; **д)** $R = \varnothing$.

**3°.** Найдите результат операций над отношениями, определенными на множестве действительных чисел.

**а)** $\overline{(>)}$; **б)** $(>)^{-1}$; **в)** $(\geq)\Delta(\leq)$; **г)** $(>) \cap (<)$;

**д)** $(=) \circ (>)$; **е)** $(<) \circ (<)$; **ж)** $(<) \circ (>)$.

**4.** Являются ли следующие отношения рефлексивными, симметричными, транзитивными (в геометрии плоскости):

**а)** «точки $a$ и $b$ лежат на одной прямой»;

**б)** «прямая $a$ перпендикулярна прямой $b$»;

**в)** «прямая $a$ параллельна прямой $b$» (ответ зависит от того, по какому учебнику вы изучали геометрию);

**г)** «для функций $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$»?

**5.** Пусть $f : A \to B$ – некоторое отображение. Будут ли следующие отношения отношениями эквивалентности на множестве $A$:

**а)** $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$; **б)** $x \sim_{\bar{f}} y \iff f(x) \neq f(y)$?

В случае положительного ответа на вопрос, опишите классы эквивалентности для соответствующего отношения.

**6.** Найдите $R \circ R$, где $R(x, y)$ — бинарное отношение на множестве $\mathbb{R}$, означающее, что **а)** $y = x + 1$; **б)** $x + y = 1$.

**7.** Пусть $P \subseteq A \times A$ и $Q \subseteq B \times B$ – отношения эквивалентности. Будет ли отношением эквивалентности отношение $R \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ : $(a, b)R(a', b') \iff (aPa') \wedge (bQb')$?

**8.** Пусть $R$ — бинарное отношение на конечном множестве $A$. Определим бесконечную последовательность бинарных отношений:

$$R_0 = R, \ \ R_1 = R_0 \circ R = R \circ R, \ \ R_2 = R_1 \circ R, \ \ R_3 = R_2 \circ R, \ \dots \ ,$$

$$R_n = R_{n-1} \circ R, \ \dots$$

Верно ли, что (для произвольного $R$) начиная с некоторого $n$ выполняется $R_n = R_{n+1}$?

## Домашнее задание

**1.** Ответьте на следующие вопросы для бинарного отношения $R \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$. Является ли $R$ рефлексивным? симметричным? транзитивным? отношением эквивалентности? Для каждого отношения $R$ нарисуйте соответствующий граф. Используйте неориентированный граф для симметричных бинарных отношений, в случае нерефлексивных бинарных отношений используйте петли.

**а)** $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$;

**б)** $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

**2.** Выразите отношение «племянник(-ца)» через отношения «отец» и «мать» и операции над отношениями.

**3.** Пусть бинарные отношения $P_1, P_2 \subseteq A \times A$ транзитивны. Будут ли $\overline{P_1}$, $P_1 \cap P_2$, $P_1 \cup P_2$, $P_1 \circ P_2$ обладать теми же свойствами?

**4.** Бинарное отношение на множестве из 6 элементов содержит 33 пары. Может ли оно быть **а)** симметричным; **б)** транзитивным?

**5.** Какие из следующих бинарных отношений на множестве $\mathbb{N}$ — отношения эквивалентности?

**а)** $xPy$ : у чисел $x$ и $y$ одинаковая последняя цифра (здесь и далее в десятичной записи)

**б)** $xQy$ : числа $x$ и $y$ отличаются в ровно одной цифре.

**в)** $xRy$ : разница между суммами цифр $S_x$ и $S_y$ чётна. Формально: пусть $\overline{x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0}$ — десятичная запись числа $x$; $S_x = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$.

**6.** Найдите число отношений эквивалентности на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$.

**7.** Об отображениях (всюду определенных функциях) $f$, $g$ из множества $A$ в себя известно, что $f \circ g \circ f = \mathrm{id}_A$. Верно ли, что $f$ — биекция? (Множество $A$ не обязательно конечное.)

**8.** Пусть $R$ – отношение эквивалентности на множестве $A$. Докажите, что существуют такие множество $B$ и отображение $f : A \to B$, что каждый класс эквивалентности $C$ представим в виде $C = f^{-1}(b)$ для некоторого элемента $b \in B$.

**9.** Множество $A$ состоит из семи элементов. Найдите количество отображений $f : A \to A$, таких что $f \circ f = \mathrm{id}_A$.

# 11 Ориентированные графы и отношения порядка

Два графа $G(V, E)$ и $G'(V', E')$ называют *изоморфными*, если существует биекция $f : V \to V'$, такая что $(u, v) \in E \iff (f(u), f(v)) \in E'$.

*Отношением частичного порядка (порядком)* называют антисимметричное и транзитивное отношение $P \subseteq A \times A$, которое либо рефлексивно, либо антирефлексивно. В первом случае отношение порядка называют *нестрогим* и обозначают $\leqslant$, а во втором – *строгим* и обозначают $<$. Каждому отношению порядка $<$ ($\leqslant$) ставят в соответствие отношение *непосредственного следования* $\prec$:

$$\prec = \{(x, y) \mid (x < y) \wedge \neg(\exists z : x < z \wedge z < y)\}.$$

Отношения частичного порядка $\leqslant_P \subseteq A \times A$ и $\leqslant_Q \subseteq B \times B$ называются *изоморфными*, если существует такая биекция $f : A \to B$, что $x \leqslant_P y \iff f(x) \leqslant_Q f(y)$.

**1.** Вершины ориентированного графа — целые числа от 0 до 9. Ребро идет из вершины $x$ в вершину $y$ если $y - x = 3$ или $x - y = 5$. Найдите количество компонент сильной связности в этом графе.

**2. а)** 50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг (каждая команда сыграла с каждой ровно один раз, ничьих не бывает). Говорят, что команда $A$ сильнее $B$, если $A$ выиграла у $B$ или есть команда $C$, такая, что $A$ выиграла у $C$, а $C$ выиграла у $B$. Доказать, что команда, одержавшая наибольшее число побед, сильнее любой другой.

**б)** Является ли отношение «сильнее» отношением порядка на произвольном множестве из не менее, чем трёх команд?

**3.** Сколько существует различных нестрогих частичных порядков на множестве $V = \{0, 1, 2\}$? Мы считаем порядки $P$ и $Q$ различными, если они не изоморфны друг другу. Постройте графы $(V, \prec_P)$ для каждого порядка.

**4.** Вершинами графа, который называется *булев куб размерности* $n$ и обозначается $B_n$, являются двоичные слова длины $n$, а соседями (вершинами, соединёнными ребром) являются пары слов, отличающихся в одной позиции.

**а)** Сколько вершин в булевом кубе $B_n$?

**б)** Сколько рёбер в булевом кубе $B_n$?

**в)** Сколько в булевом кубе $B_n$ путей длины 2?

**г)** Верно ли, что в графе $B_3$ есть маршрут длины 3000?

**д)** Верно ли, что в графе $B_3$ есть путь длины 8? длины 7?

**5.** Граф $S_n = \langle V, E \rangle$ имеет множество вершин $V = 2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ (вершина $v \in V$ – подмножество множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$); вершины $v$ и $u$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $|u \triangle v| = 1$.

**а)** Докажите, что граф $S_n$ изоморфен булеву кубу $B_n$.

**б)** Сколько существует различных наборов (попарно различных) подмножеств $A_1, A_2, A_3 \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, для которых выполняется условие $|A_1 \triangle A_2| = |A_2 \triangle A_3| = 1$?

**6.** Ориентируем граф $S_n$ так, что $u \to v$ если $|u| < |v|$. Получившийся граф задаёт отношение непосредственного следования $\prec$.

1. Опишите соответствующее $\prec$ отношение частичного порядка $\leqslant$.

2. Ориентируем булев куб $B_n$ направив стрелки от вершин, в которых различающаяся координата равна нулю. Получившийся граф задаёт покоординатный порядок (отношение $\prec$) на множестве $\{0,1\}^n$. Докажите, что этот порядок изоморфен порядку из предыдущего пункта.

**7.** Верно ли, что если $P$ – отношение частичного порядка, то следующие отношения также будут задавать частичные порядки: **а)** $P^{-1}$; **б)** $\overline{P}$?

**8.** Найдите максимальное количество (простых) путей с заданными концами в ориентированном ациклическом графе на $n$ вершинах.

**9.** Известно, что в ориентированном графе на $\geqslant 2$ вершинах из любой вершины в любую другую идёт ровно один путь. Верно ли, что выходные (они же исходящие) степени вершин в этом графе равны 1?

**10.** Предположим, что последовательность чисел задана соотношением $a_{n+1} = f(a_n)$, где $f$ — некоторая функция (определённая на всех числах).

**а)** Покажите, что либо все члены последовательности различны, либо она периодична: после некоторого начала (предпериода) числа начинают повторяться (период).

**б)** Покажите, что второй случай имеет место тогда и только тогда, когда $a_{2n} = a_n$ при некотором $n$.

## Домашнее задание

**1.** Известно, что в неориентированном графе существует маршрут, проходящий по каждому ребру ровно два раза. Верно ли, что в графе есть замкнутый эйлеров маршрут?

**2.** Выходная (она же исходящая) степень каждой вершины в ориентированном графе на $n \geqslant 3$ вершинах равна $n-2$. Какое количество компонент сильной связности может быть в этом графе? Укажите все возможные значения.

**3.** Пусть в ориентированном графе для любой пары вершин $u$, $v$ есть либо ребро $(u, v)$, либо ребро $(v, u)$ (ровно одно из двух). Докажите, что в таком графе есть (простой) путь, включающий в себя все вершины.

**4.** Профессор Рассеянный построил частичный порядок $<_P$ для утреннего одевания:

*очки* $<_P$ *брюки* $<_P$ *ремень* $<_P$ *пиджак,*

*очки* $<_P$ *рубашка* $<_P$ *галстук* $<_P$ *пиджак,*
*брюки* $<_P$ *туфли,*
*очки* $<_P$ *носки* $<_P$ *туфли,*
*очки* $<_P$ *часы.*

Постройте линейный порядок на вещах так, чтобы исходный порядок их одевания не был нарушен.

**5.** В Вестеросе $n$ городов, каждые два соединены дорогой. Дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник хочет установить на всех дорогах одностороннее движение так, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться. Докажите, что

**а)** волшебник может это сделать;

**б)** найдется город, из которого можно добраться до всех, и найдется город, из которого нельзя выехать;

**в)** существует единственный маршрут, обходящий все города.

**г)** Сколькими способами волшебник может осуществить свое намерение?

Бинарное отношение $R \subseteq A \times A$ называется *линейным*, если

$$\forall x, y \in A : (x \neq y) \Rightarrow \big((xRy) \vee (yRx)\big).$$

**6.** Бинарное отношение $P$ называется турниром, если оно антирефлексивно, антисимметрично и линейно. (Неформально — это результат кругового турнира — каждую альтернативу сравнили с каждой и запомнили результат). Докажите, что либо турнир — строгий линейный порядок, либо существуют такие альтернативы $a$, $b$, $c$, что $aPb$, $bPc$ и $cPa$.

**7.** Сколько есть порядков на $n$-элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?

**8.** Докажите, что любой частичный порядок $P$ на конечном множестве $A$ можно продолжить до линейного. То есть можно добавить в $P$ некоторые пары элементов из $A \times A$ так, что любые два элемента $a, b \in A$ окажутся сравнимы: будет выполнено либо $aPb$ либо $bPa$.

**9.** Граф $G$ имеет множество вершин $V = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Граф $G$ содержит ребро $\{u, v\}$ (для определённости $u < v$), если $v$ делится на

$u$ и не существует (отличной от $v$ и $u$) вершины $s \in V$, такой что и $v$ делится на $s$ и $s$ делится на $u$.

1. Постройте граф $G$.

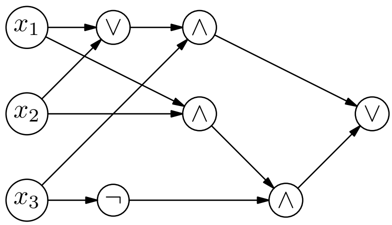
2. Изоморфен ли этот граф булеву кубу $B_3$? При положительном ответе укажите биекцию.

# 12 Булевы функции

**1.** Разложите в ДНФ и КНФ булеву функцию, заданную вектором значений: $f(x_1, x_2, x_3) = 10100101$.

**2.** Сколько имеется булевых функций от $n$ переменных, сохраняющих одновременно «1» и «0»?

**3.** Найдите функцию, которую вычисляет схема в стандартном базисе, представленная графически как




**4.** Существует ли такая булева функция $f$ от двух переменных, что схема в базисе $\{\wedge, f\}$

$$x_1,\ x_2,\ s_1 := f(x_1, x_2);\ s_2 := f(x_2, x_1);\ s_3 := s_1 \wedge s_2$$

вычисляет **а)** функцию $x_1$? **б)** функцию $x_1 \oplus x_2$?

**5.** Являются ли полными следующие базисы? При отрицательном ответе, укажите в каких из классов $T_0, T_1, M, L, S$ лежит замыкание базиса.

**а)** $\{\neg, \to\}$, где $\to$ — импликация;

**б)** $\{x \downarrow y\}$, где $x \downarrow y$ равна $\bar{x} \wedge \bar{y}$ (стрелка Пирса);

**в)** $\{\wedge, \vee, \setminus\}$, где $x \setminus y$ равна $x \wedge \bar{y}$;

**г)** $\{1, \oplus\}$;

**д)** $\{\neg; \equiv\}$, где $x \equiv y$ равна $(x \to y) \wedge (y \to x)$.

**6.** Постройте замыкание базиса $\{\neg, \oplus\}$.

**7.** Назовём *функцией большинства* $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ булеву функцию, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных (если мнения разделились поровну, $\mathrm{MAJ} = 0$). Схемы в базисе $\{\vee, \wedge, 1, 0\}$ называются *монотонными*. Вычисляется ли MAJ монотонной схемой?

**8.** Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной* (или нечётной), если для всех $x_1, \ldots, x_n$ выполняется равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n).$$

**а)** Являются ли самодвойственными функции $x_1 \vee x_2$, $x_1 \wedge x_2$?

**б)** Докажите, что схема в базисе, состоящем из самодвойственных функций, вычисляет самодвойственную функцию.

**9.** Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — несамодвойственная функция. Докажите, что константы 0, 1 вычисляются в базисе $\{\neg, f\}$.

**10.** Докажите, что всякую булеву схему в стандартном базисе размера $s$ с $n$ переменными можно переделать в булеву схему, в которой все отрицания применяются только к переменным, и при этом размер новой схемы не превышает $2s$.

## Домашнее задание

**1.** Укажите существенные и несущественные (фиктивные) переменные функции $f(x_1, x_2, x_3) = 00111100$ и разложите её в ДНФ и КНФ.

**2.** Вычисляется ли константа 0 в базисе $\{\neg(x_1 \to x_2)\}$?

**3.** Вычислите $\mathrm{MAJ}(x, y, z)$ схемой в базисе Жегалкина $\{1, \wedge, x_1 \oplus x_2\}$. (Определение MAJ см. на обороте листа.)

**4.** Сколько ненулевых коэффициентов в многочлене Жегалкина, который равен $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$ ?

**5.** Докажите полноту базиса, состоящего из одной функции $x \mid y$, которая по определению равна $\neg(x \wedge y)$ (*штрих Шеффера*, она же NAND).

**6.** Является ли полным базис $\{\vee; \to\}$ из дизъюнкции и импликации?

**7.** Является ли полным базис $\{\neg, \mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)\}$?

**8.** Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — немонотонная функция. Докажите, что $\neg x_i$ вычисляется в базисе $\{0, 1, f\}$.

**9.** Докажите, что всякую монотонную булеву функцию можно вычислить монотонной схемой (с базисом $\wedge, \vee, 1, 0$).

**10.** Булева функция $\mathrm{PAR}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна 1, если количество единиц среди значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нечётно и нулю, если чётно.

**а)** Выразите функцию $\mathrm{PAR}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через известные булевы функции (можно использовать связки $\wedge, \vee, \neg, \oplus, \to$ ).

**б)** При каких $n \geqslant 1$ можно представить функцию $\mathrm{PAR}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде ДНФ без отрицаний?

**11*.** Булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется *линейной*, если она представляется в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus \cdots \oplus (a_n \wedge x_n)$$

для некоторого набора $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ булевых коэффициентов.

Докажите, если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — нелинейная функция, то конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ вычисляется схемой в базисе $\{0, 1, \neg, f\}$.

**12*.** Докажите теорему Поста.

# 13 Производящие функции-1

Решая задачи этого листка, используйте аппарат производящих функций, даже если вы можете решить задачу с помощью комбинаторных рассуждений.

**1.** Докажите, что **а)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (m-1)^{n-k} = m^n$;

**б)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$; **в)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\cdot x^k = \frac{(n-1)\cdot x^{n+1} - n \cdot x^n + x}{(x-1)^2}$.

**2.** Найдите коэффициенты производящей функции **а)** $(1+x)^{-n}$;

**б)** $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$ (коэффициенты при мономах $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_m^{i_m}$).

**3.** Докажите, что $\dbinom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k}^2$.

**4.** В урне находится 3 красных, 4 синих и 2 зелёных шара. Сколькими способами можно извлечь 6 шаров так, чтобы среди них было нечётное число красных, чётное число синих и хотя бы один зелёный шар?

**5.** Какова вероятность при бросании четырёх игральных костей выбросить 14 очков?

**6.** Найдите производящую функцию $f(x)$ для последовательности $a_n$, состоящей из числа способов набрать $n$ рублей, имея монеты в 1, 2 и 5 рублей. Представьте $f(x)$ аналитически.

**7.** Вычислите $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{3}{2}\right)^k$.

**8.** Имеется $p$ чёрных, $q$ белых и $r$ красных шаров, при этом $p \geqslant q \geqslant r$, $p < q + r$, $p + q + r = 2s$. Докажите, что число способов разделить эти шары поровну между двумя людьми равно $s^2 + s + 1 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$.

## Домашнее задание

**1.** Найдите производящую функцию для последовательности

**а)** $a_k = k$; **б)** $a_k = \dfrac{1}{k!}$.

**2.** Выразите аналитически:

**а)** $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dbinom{n+k}{n} x^k$; **б)** $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dbinom{k}{n} x^k$; **в)** $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k+1)x^k$; **г)*** $\sum\limits_{k\geqslant 0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \dbinom{n}{3k}$;

**3.** Упростите выражение:

**а)** $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\binom{n}{k+1}}{(k+2)(k+3)}$; **б)** $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot \dbinom{n}{k} \cdot 2^k$; **в)** $\sum\limits_{k=0}^{99} \dbinom{99}{k} \cdot \dbinom{100}{k}$;

**г)*** $\sum\limits_{k=0} \dfrac{k \cdot \binom{n}{2k}}{2^k}$.

**4.** Докажите, что $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1) \dbinom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

**5.** Известна производящая функция $g(x)$ для последовательности $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ частичных сумм последовательности $\{a_k\}$. Выразите через неё производящую функцию для последовательности $\{a_k\}$.

**6*.** Найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{x^i}{i+1}$, $|x| < 1$.

# 14 Производящие функции-2

**1.** Разложением числа $n$ называется такая последовательность положительных целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, что $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. Найдите производящую функцию для последовательности $\{a_n\}$, в которой $a_n$ — число разложений $n$ на нечетные слагаемые.

**2.** (Задача о Ханойской башне). Есть три стержня, на первом из них нанизано $n$ колец разного радиуса; чем ниже лежит кольцо, тем больше радиус. Кольца разрешено перекладывать со стержня на стержень, но только при условии что кольцо меньшего радиуса кладётся на кольцо большего радиуса. Найдите минимальное число перекладываний, требуемое для того, чтобы переложить все кольца с одного стержня на другой.

**3.** Последовательность $\{a_n\}$ состоит из числа способов разрезать правильный $n$-угольник на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали (говорят, $a_n$ — число триангуляций $n$-угольника). Найдите производящую функцию для последовательности $\{a_n\}$.

**4.** Найдите производящую функцию и аналитическую формулу для последовательности

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 0; \\ 1, & \text{при } n = 1; \\ 2F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

**5.** Докажите соотношения:

**а)** $[x]^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k;$ **б)** $\left\{ n \atop m \right\} = \dfrac{1}{m!} \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{m-i} \dbinom{m}{k} k^n;$

**в)** $x^n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \left\{ {n \atop k} \right\} [x]^k;$ **г)** $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$

**6.** Найдите (аналитическую) производящую функцию для последовательности $G_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (n-k) F_k$, где $F_k$ — $k$-ое число Фибоначчи.

**7.** Найдите число отношений эквивалентности на $n$-элементном множестве.

## Домашнее задание

**1.** Найдите производящую функцию и аналитическую формулу для последовательности:

**а)**

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 0; \\ 1, & \text{при } n = 1; \\ F_{n-1} + 2F_{n-2}, & \text{при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

**б)**

$$F_n = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0; \\ 3, & \text{при } n = 1; \\ 4F_{n-1} - 4F_{n-2}, & \text{при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

**2.** Докажите, что если последовательность $a_n$ определяется соотношением

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0,$$

где $p$, $q$ – некоторые числа, то для её производящей функции $F(t)$ верно, что

$$F(t) = \frac{a_0 + (a_1 + pa_0)t}{1 + pt + qt^2}.$$

**3.** Найдите производящую функцию для последовательности $a_n$, состоящей из числа двоичных слов длины $n$, в которых нет двух единиц подряд.

**4.** Последовательность $\{b_n\}$ состоит из количеств таких последовательностей целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, что $a_1 = 0$ и $0 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 1$ для $1 \leqslant i < n$. Найдите производящую функцию для последовательности $\{b_n\}$.