Динамическое программирование

1. Рассмотрим следующую игру. На доске нарисовано n палочек. Два игрока по очереди зачёркивают от одной до трёх палочек. Проигрывает тот, кто зачеркнул последнюю палочку.

1. Кто выигрывает при $n = 20$? (Считая, что соперник не ошибается.)

2. Кто выигрывает при произвольном n? Постройте алгоритм, который решает задачу **а)** динамическим программированием; **б)** жадным алгоритмом.

2. Фирма производит программное обеспечение для банкоматов разных стран мира. Банкомату нужно выдавать запрашиваемую клиентом сумму минимальным количеством купюр.

1. Если у банкомата есть купюры номиналом 1, 2, 5, 10, 20, 50, а сумма — 71, то набор банкнот будет 50+20+1. Постройте жадный алгоритм, который будет решать задачу для данного набора купюр и произвольной суммы, которая является входом задачи.

2. Постройте алгоритм, который решает задачу, в случае когда на вход помимо суммы подаются и номиналы банкнот. Является ли он полиномиальным от длины входа?

3. Постройте алгоритм, который, получив на вход число n (k и n), выводит

а) все подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$;

б) все перестановки чисел $1, \ldots, n$;

в) все подмножества множества размера k множества $\{1, \ldots, n\}$.

4. Постройте алгоритм, перечисляющий все последовательности из n нулей, единиц и двоек, в которых никакая группа цифр не повторяется два раза подряд (нет куска вида XX).

5. Постройте алгоритм со временем работы $O(nt)$ для следующей задачи. На вход задачи подаются положительные целые числа $n, a_1, \ldots, a_n$ и t. Необходимо проверить, представимо ли число t в виде суммы из некоторых членов последовательности $a_1, \ldots, a_n$? Каждое a_i разрешено использовать не более одного раза (можно не использовать вообще).

Указания и решения задач ***3*** *и* ***5*** *приведены в главах 2 и 3 книги А. Шеня «Программирование: теоремы и задачи». Задача* ***4*** *взята из главы 3, но её решение в книге не приведено.*

6. Есть прямоугольный кусок ткани $X \times Y$, где X и Y — положительные целые числа. Из этой ткани можно делать n видов изделий; каждое изделие вида i использует прямоугольник $a_i \times b_i$ и приносит доход c_i (все a_i, b_i, c_i — тоже положительные целые числа). Станок для резки ткани умеет резать прямоугольные куски только вдоль их стороны (любой). Какой максимальный доход можно извлечь из куска $X \times Y$? Ваш алгоритм должен построить оптимальную последовательность разрезов.

Вершинным покрытием (vertex cover) графа $G(V, E)$ называется множество его вершин $S \subseteq V$, которое содержит хотя бы один конец каждого ребра графа.

7. Докажите, что следующий алгоритм является 2-приближённым алгоритмом для задачи о вершинном покрытии. Пока в графе G есть рёбра, возьмём произвольное ребро (u, v), добавим его концы в покрытие, после чего удалим все рёбра, смежные с u и v.

В этой задаче вам предложено доказать теорему 3 раздел 2.1 книги Кузюрина и Фомина «Эффективные алгоритмы».

8. На столе лежат в ряд n банковских карт, на счету которых находится $v_1, v_2, \dots v_n$ долларов. Два игрока по очереди берут карты, причём можно брать только крайнюю карту (с любой стороны), до тех пор, пока не кончатся все карты. Каждый из игроков, заинтересован в максимальной суммарной стоимости взятых им карт. Считайте, что n чётно.

1. Покажите, что жадная стратегия (брать ту из карт, которая дороже) не оптимальна: уже первый ход по этому правилу может помешать достичь оптимума.

2. Постройте алгоритм отыскания оптимальной стратегии для первого игрока за время $O(n^2)$. Получив на вход $v_1, \dots, v_n$, алгоритм должен произвести препроцессинговые вычисления за $O(n^2)$, а вычисление каждого следующего хода должно выполняться за $O(1)$ шагов (с использованием сохранённой информации).

3. Представьте теперь, что задача игрока не максимизировать стоимость карт, а просто набрать стоимость больше, чем у соперника. Постройте жадное решение для этой задачи.