

## Рекурсия и итерация

1. Найдите с помощью расширенного алгоритма Евклида обратный остаток  $7^{-1} \pmod{102}$ .
2. Вычислите  $3^{11} \pmod{107}$ .
3. Доказать корректность рекурсивный алгоритма умножения чисел Multiply ([ДПВ] раздел 1.1.2) и получить верхнюю оценку на его время работы.

```

1 Function Multiply ( $x, y$ ) :
   | Вход : ( $x, y$ ) — целые числа,  $y \geq 0$ 
   | Выход:  $x \times y$ 
2   if  $y == 0$  then
3     | return 0
4   end
5    $z = \text{Multiply}(x, \lfloor y/2 \rfloor)$ 
6   if  $y$  чётно then
7     | return  $2z$ 
8   end
9   else
10    | return  $2z + x$ 
11  end
12 end

```

4. Постройте итеративную версию для алгоритма Multiply перейдя от рекурсии к итерации, используя стек.
- 5 [Задача о Ханойской башне]. Есть три стержня, на первом из них нанизано  $n$  колец разного радиуса; чем ниже лежит кольцо, тем больше радиус. Кольца разрешено перекладывать со стержня на стержень, но только при условии что кольцо меньшего радиуса кладётся на кольцо большего радиуса. Найдите минимальное число перекладываний, требуемое для того, чтобы переложить все кольца с одного стержня на другой. (Найдите как верхнюю, так и нижнюю оценку).

6 [Шень 1.1.33]. Функция  $f$  с натуральными аргументами и значениями определена так:  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2n) = f(n)$ ,  $f(2n + 1) = f(n) + f(n + 1)$ .

1. Построить рекурсивный и итеративный алгоритмы, вычисляющий  $f(n)$  и оценить их сложности, считая что арифметические операции стоят  $O(1)$ .
2. Постройте алгоритм, требующий  $O(\log n)$  операций.