

Динамическое программирование I

1. На вход задачи поступает ориентированный ациклический граф с весами на вершинах; в графе выделена вершина s . Постройте алгоритм, который находит вершину минимального веса, достижимую из s .
2. Назовём последовательность x_1, x_2, \dots, x_n строго унимодальной, если существует такой индекс k , что $x_i < x_k$ при $i < k$ и $x_j > x_k$ при $j > k$. Постройте алгоритм, который, получив на вход конечную последовательность натуральных чисел, находит её самую длинную строго унимодальную подпоследовательность.
3. На вход задачи поступают две последовательности символов x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_m . Требуется найти кратчайшую последовательность z_1, z_2, \dots, z_k , которая содержит и x и y в качестве подпоследовательности. Пример: для $x = aabac$ и $y = bbaca$ искомой последовательностью будет $z = baabaca$.
4. Рассмотрим следующую игру. На доске нарисовано n палочек. Два игрока по очереди зачёркивают от одной до трёх палочек. Проигрывает тот, кто зачеркнул последнюю палочку.
 1. Кто выигрывает при $n = 20$? (Считая, что соперник не ошибается.)
 2. Кто выигрывает при произвольном n ? Постройте алгоритм, который решает задачу
 - а) динамическим программированием; б) жадным алгоритмом.
5. Два игрока играют в следующую игру. На поле из $(N + 1) \times (N + 1)$ клетки (нумерация клеток от 0 до N) в клетке $(0, 0)$ стоит фишка. Её разрешено двигать из клетки (x, y) в клетку с координатами $(x + a_i, y + b_i)$, где пары неотрицательных целых чисел (a_i, b_i) обговорены перед началом игры; при этом a_i и b_i не равны нулю одновременно. Выигрывает тот игрок, который первым вывел фишку в клетку, которая находится на расстоянии не менее чем R от $(0, 0)$. Необходимо определить кто из игроков выигрывает, при безошибочных действиях соперника. Игроки ходят по очереди, пропускать ход нельзя.
 1. Определите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию при безошибочной игре соперника, если $N = 5$, $R = 5$, а список допустимых ходов: $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$.
 2. Постройте алгоритм, который определяет победителя и его выигрышную стратегию в общем случае и оцените его сложность.
6. Постройте алгоритм, который, получив на вход число n (k и n), выводит
 - а) все подмножества множества $\{1, \dots, n\}$;
 - б) все перестановки чисел $1, \dots, n$;
 - в) все подмножества множества размера k множества $\{1, \dots, n\}$.
7. Фирма производит программное обеспечение для банкоматов разных стран мира. Банкомату нужно выдавать запрашиваемую клиентом сумму минимальным количеством купюр.
 1. Если у банкомата есть купюры номиналом 1, 2, 5, 10, 20, 50, а сумма — 71, то набор банкнот будет $50+20+1$. Постройте жадный алгоритм, который будет решать задачу для данного набора купюр и произвольной суммы, которая является входом задачи.
 2. Постройте алгоритм, который решает задачу, в случае когда на вход помимо суммы подаются и номиналы банкнот. Является ли он полиномиальным от длины входа?