Жадные алгоритмы

Во всех задачах этой недели мы полагаем, что арифметические операции стоят $O(1)$.

1. На вход подаётся последовательность чисел $x_1, \dots, x_n$. Необходимо найти максимальное произведение двух различных элементов последовательности, кратное 15. Формально, нужно найти $\max\limits_{i \neq j}\{x_i \times x_j \mid x_i \times x_j \,\vdots\, 15\}$. Постройте онлайн-алгоритм, решающий задачу и использующий $O(1)$ битов памяти и $O(1)$ регистров (в каждом из которых может храниться число x_i).

2 [Шень 1.3.1 (в,д)]. Постройте линейный по времени онлайн-алгоритм, который вычисляет следующие функции или укажите индуктивные расширения для следующих функций:

а) второй по величине элемент последовательности целых чисел (тот, который будет вторым, если переставить члены в неубывающем порядке);

б) максимальная длина монотонного (неубывающего или невозрастающего) участка из идущих подряд элементов в последовательности целых чисел;

3[Шень 1.3.2]. Даны две последовательности целых чисел `x[1] ... x[n]` и `y[1] ... y[k]`. Выясните, является ли вторая последовательность подпоследовательностью первой, то есть можно ли из первой вычеркнуть некоторые члены так, чтобы осталась вторая. Число действий $O(n+k)$.

4. На вход подаётся число k и последовательность из нулей и единиц, которая заканчивается специальным маркером конца ввода \$. Докажите, что любой онлайн-алгоритм, который проверяет, что на k-ом месте от конца последовательности стоит 1 использует $\Omega(k)$ битов памяти.

5. На вход подаётся последовательность чисел $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$.

1. Постройте онлайн-алгоритм, который вычисляет сумму $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i \times b_j$.

2. Постройте жадный линейный алгоритм, решающий задачу.

6 [Шень 1.1.28-29]. Дано натуральное $\mathtt{n}$.

1. Подсчитайте количество решений неравенства $\mathtt{x}^2 + \mathtt{y}^2 < \mathtt{n}$ в натуральных (неотрицательных целых) числах, не используя действий с вещественными числами.

2. Та же задача, но количество операций должно быть порядка $\sqrt{\mathtt{n}}$.

7 [Шень 1.2.21]. Даны два массива $\mathtt{x[1]} \leq \ldots \leq \mathtt{x[k]}$ и $\mathtt{y[1]} \leq \ldots \leq \mathtt{y[n]}$. Найдите их « пересечение», то есть массив $\mathtt{z[1]} \leq \ldots \leq \mathtt{z[m]}$, содержащий их общие элементы, причём кратность каждого элемента в массиве z равняется минимуму из его кратностей в массивах x и y. Число действий порядка $\mathtt{k} + \mathtt{n}$.