

От кратчайших путей к динамическому программированию

1. Как используя возведение матрицы смежности в степень найти компоненты сильной связности ориентированного графа?
2. Постройте алгоритм, который по данному ориентированному графу с положительными весами находит длину его самого короткого цикла (если в графе циклов нет, то алгоритм должен сообщить об этом). Время работы алгоритма должно быть $O(|V|^3)$.
3. В графе может быть несколько кратчайших путей между какими-то вершинами. Постройте линейный по времени алгоритм, находящий в заданном неориентированном графе с единичными весами количество различных кратчайших путей между заданными двумя вершинами.

Определение. Пусть G — связный неориентированный граф, а $d_{u,v}$ — кратчайшее расстояние между вершинами u и v . *Диаметром* графа G называют число $\max_{u,v} d_{u,v}$ (максимальную из длин кратчайших простых путей между каждой парой вершин графа).

4. Постройте алгоритм, который находит диаметр дерева за $O(|V|)$;
5. Граф G — ориентированный граф, полученный из корневого дерева с неотрицательными весами на рёбрах ориентацией рёбер от корня к листьям.
 1. Предложите алгоритм поиска кратчайших путей от вершины s до остальных вершин и оцените его сложность.
 2. Граф G' получается из G добавлением рёбер с неотрицательным весом от каждого листа в корень. Опишите эффективный алгоритм поиска кратчайшего расстояния между двумя данными вершинами в G' и оцените его сложность.
6. Постройте алгоритм, определяющий, содержит ли данный неориентированный граф простой цикл длины 4. Время работы должно быть $O(|V|^3)$.
7. Дан орграф, вам нужно найти длины кратчайших путей от вершины v до всех остальных вершин. В графе могут быть рёбра отрицательного веса, но только те, которые выходят из v . Предложите эффективный алгоритм, докажете его корректность и оцените асимптотику.