

Жадные алгоритмы

Во всех задачах этой недели мы полагаем, что арифметические операции стоят $O(1)$.

1 [Шень 1.3.1 (в,д)]. Постройте линейный по времени онлайн-алгоритм, который вычисляет следующие функции или укажите индуктивные расширения для следующих функций:

а) второй по величине элемент последовательности целых чисел (тот, который будет вторым, если переставить члены в неубывающем порядке);

б) максимальная длина монотонного (неубывающего или невозрастающего) участка из идущих подряд элементов в последовательности целых чисел;

2. На вход подаётся последовательность положительных целых чисел x_1, \dots, x_n . Необходимо найти максимальное произведение двух различных элементов последовательности, кратное 15. Формально, нужно найти $\max_{i \neq j} \{x_i \times x_j \mid x_i \times x_j : 15\}$. Постройте онлайн-алгоритм, решающий задачу и использующий $O(1)$ битов памяти и $O(1)$ регистров (в каждом из которых может храниться число x_i).

3 [Шень 1.3.2]. Даны две последовательности целых чисел $x[1] \dots x[n]$ и $y[1] \dots y[k]$. Выясните, является ли вторая последовательность подпоследовательностью первой, то есть можно ли из первой вычеркнуть некоторые члены так, чтобы осталась вторая. Число действий $O(n + k)$.

4 [5.32 ДПВ]. К серверу приходят одновременно n клиентов. Для клиента i известно время его обслуживания t_i . Время ожидания клиента определяется как сумма времени обслуживания всех предыдущих клиентов и времени обслуживания его самого. К примеру, если обслуживает клиентов в порядке номеров, то время ожидания клиента i будет равно $\sum_{j=1}^i t_j$. Постройте эффективный алгоритм, находящий последовательность обслуживания клиентов с минимальным суммарным временем ожидания клиентов.

5. Дан массив длины n , состоящий только из нулей и единиц. Предложите линейный алгоритм сортировки данного массива.

6. На вход подаётся число k и последовательность из нулей и единиц, которая заканчивается специальным маркером конца ввода $\$$. Докажите, что любой онлайн-алгоритм, который проверяет, что на k -ом месте от конца последовательности стоит 1 использует хотя бы k битов памяти.

7 [Шень 1.1.28-29]. Дано натуральное n .

1. Подсчитайте количество решений неравенства $x^2 + y^2 < n$ в натуральных (неотрицательных целых) числах, не используя действий с вещественными числами.

2. Та же задача, но количество операций должно быть порядка \sqrt{n} .

8 [Шень 1.2.21]. Даны два массива $x[1] \leq \dots \leq x[k]$ и $y[1] \leq \dots \leq y[m]$. Найдите их «пересечение», то есть массив $z[1] \leq \dots \leq z[m]$, содержащий их общие элементы, причём кратность каждого элемента в массиве z равняется минимуму из его кратностей в массивах x и y . Число действий порядка $k + m$.