Домашнее задание

1. Дан массив длины n, состоящий только из нулей и единиц. Предложите линейный алгоритм сортировки данного массива.

2. На прямой задано n отрезков, причем известно, что они образуют систему строго вложенных отрезков (их можно упорядочить так, чтобы каждый строго содержался в следующем). Отрезки заданы координатами концов $[l_i, r_i]$ (и могут быть даны в неупорядоченном виде). Предложите асимптотически эффективный алгоритм (с точки зрения количества арифметических операций), который находит все точки прямой, которые покрыты ровно $2n/3$ отрезками.

3. Рассмотрим детерминированный алгоритм поиска порядковой статистики за линейное время из параграфа 9.3 Кормена. Какая асимптотика будет у алгоритма, если делить элементы массива на группы по семь, а не по пять?

4. На вход задачи подаётся число n и массив чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$. Постройте линейный алгоритм, находящий число s, при котором достигается минимум суммы

$$\sum_{i=1}^{2n+1} |x_i - s|.$$

5. Предложите полиномиальный от длины входа алгоритм решения сравнения $a \cdot x + b \equiv 0 \pmod M$ (На вход дают целые числа a, b, M в двоичной системе исчисления).

6. Перемножьте многочлены $2x^3 + 3x^2 + 1$ и $2x^2 + x$ с помощью БПФ. В решении должны быть приведены вычисления всех используемых преобразований.

7. Решите с помощью преобразования Фурье задачу о поиске всех вхождений образца с джокерами в текст. Текст и образец — это последовательности $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ и $p_0, p_1, \dots, p_{m-1}$, $m < n$, где все t_i — символы из алфавита, а p_j — либо символ из алфавита, либо джокер. Образец входит в текст в позиции $i \in \{0, \dots, n-m-1\}$, если $t_{i+j} = p_j$ при всех $j \in \{0, \dots, m-1\}$, для которых p_j — символ алфавита. Для решения этой (и более сложной задачи в домашнем задании) есть $O(n \log n)$ алгоритм, основанный на БПФ. Закодируем каждый символ алфавита уникальным положительным числом, а джокер нулём, и определим последовательность r_i:

$$r_i = \sum_{j=0}^{m-1} p_j t_{i+j} \left(p_j - t_{i+j}\right)^2$$

1. Докажите, что образец входит в текст в позиции i тогда и только тогда, когда $r_i = 0$.

2. Постройте $O(n \log n)$ алгоритм, который находит все вхождения образца с джокерами в текст.

Заметка. Эта задача подготовлена на основе статьи P. Clifford, R. Clifford Simple deterministic wildcard matching, Information Processing Letters, Vol. 101, Is. 2, 2007, Pp. 53-54,

8 [ДПВ **2.30**]. В данном упражнении показывается, как вычислять преобразование Фурье (ПФ) в арифметике сравнений, например, по модулю 7.

1. Существует такое ω, что все степени $\omega, \omega^2, \dots, \omega^6$ различны (по модулю 7). Найдите такое ω и покажите, что $\omega + \omega^2 + \ldots + \omega^6 = 0$. (Отметим также, что такое число существует для любого простого модуля.)

2. Найдите преобразование Фурье вектора $(0, 1, 1, 1, 5, 2)$ по модулю 7, используя матричное представление, то есть умножьте данный вектор на $M_6(\omega)$ (для найденного ранее ω). Все промежуточные вычисления производите по модулю 7.

3. Запишите матрицу обратного преобразования Фурье. Покажите, что при умножении на эту матрицу получается исходный вектор. (Как и прежде, все вычисления должны производиться по модулю 7.)

4. Перемножьте многочлены $x^2 + x + 1$ и $x^3 + 2x - 1$ при помощи ПФ по модулю 7.