МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕСИТЕТ)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________Д.А. Зубцов
20 августа 2015 г.

П Р О Г Р А М М А

по дисциплине: **Теория и реализация языков программирования**
по направлению: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
факультет: **ФУПМ**
кафедра: **математических основ управления**
курс: II
семестр: 3
Трудоёмкость: базовая часть – 0 зач. ед.
вариативная часть – 0 зач. ед.
по выбору студента – 3 зач. ед.
лекции – 30 часов
Экзамен – 3 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
Диф. зачет – нет
лабораторные занятия – нет
Самостоятельная работа – 45 час.
ВСЕГО ЧАСОВ – 60

Программу составили: д.ф.-м.н. В. А. Серебряков,
к.т.н. Д. Р. Гончар, асс. А. А. Рубцов, к.ф.-м.н. С.П. Тарасов,
ст. преп. К. Б. Теймуразов.

Программа принята на заседании кафедры
математических основ управления
24 апреля 2015 года

Заведующий кафедрой С.А. Гуз

1. Известные и перспективные направления эффективного применения теории формальных языков как математической дисциплины. Алфавиты, цепочки, языки и их представление. Формальное определение грамматики. Типы грамматик по Хомскому и их свойства. Связь машин Тьюринга и грамматик типа 0. Линейно-ограниченные автоматы и их связь с КЗ-грамматиками.

2. Лексический анализ. Регулярные языки (РЯ) и регулярные выражения (РВ). Конечные автоматы (КА). Детерминированные и недетерминированные КА (ДКА и НКА). Эквивалентность классов языков, определяемых КА, РВ и автоматными грамматиками (грамматики типа 3: леволинейные – ЛЛ, праволинейные – ПЛ). Свойства замкнутости РЯ. Лемма о накачке для РЯ. Теорема Майхилла-Нероуда и минимальные автоматы. Алгоритмы поиска подстрок и КА. Алгоритм Кнута-Мориса-Пратта (КМП-алгоритм). Линейность алгоритма КМП.

Алгоритмы по теме КА

- Построение ДКА по НКА.
- Построение НКА по РВ.
- Построение ДКА по РВ.
- Построение РВ по НКА.
- По РВ R проверить, что слово принадлежит L(R).
- Построить по языку L язык L^R.
- Построение произведения (конкатенации) РЯ, дополнение РЯ, пересечение РЯ.
- Построение минимального автомата по ДКА.
- КМП-алгоритм.
- Построение по НКА эквивалентных ЛЛ- и ПЛ-грамматик.
- Построение эквивалентного НКА по ЛЛ- и ПЛ- грамматике.
- Решение уравнений с регулярными коэффициентами.

3. Синтаксический анализ: КС-грамматики (КСГ). Преобразования КС-грамматик, приведённые грамматики. Канонические формы КС-грамматик (нормальная форма Хомского). Свойства замкнутости КС-языков (КСЯ), незамкнутость КСЯ относительно пересечения. Дерево вывода КСГ. Однозначность КС-грамматик. Однозначность праволинейной грамматики, построенной по ДКА. Лемма о накачке для КСЯ. Проверка принадлежности слова КСЯ КСГ (алгоритм Кока–Янгера–Касами).

4. Синтаксический анализ: автоматы с магазинной памятью (МА). Детерминированные и недетерминированные МА. Обобщенные МА, их эквивалентность стандартным МА. Эквивалентность МА, распознающих по конечному состоянию (F-МА) и по опустошению магазина (N-МА). Эквивалентность КСГ и МА. Однозначность КСГ, построенной по детерминированному N-МА (без доказательства).

Алгоритмы по теме КСГ и МА

- Удаление недостижимых и бесполезных символов в КСГ. Удаление циклов.
- Удаление левой рекурсии в КСГ.
- Приведение КСГ к нормальной форме Хомского и нормальной форме Грейбах.
- Проверка принадлежности слова КСГ (алгоритм Кока-Янгера-Касами).
- Преобразование N-МА $\rightarrow$ F-МА.
- Преобразование F-МА $\rightarrow$ N-МА.
- Преобразование КСГ в эквивалентный N-МА.
- Преобразование N-МА в эквивалентную КСГ (с доказательством корректности для N-МА с одним состоянием).

5. Дополнительные сведения из теории конечных автоматов. Минимизация числа состояний и эквивалентность детерминированного конечного автомата (ДКА).

6. Предсказывающий разбор *сверху вниз*. Алгоритм разбора *сверху вниз*. Функции *FIRST* и *FOLLOW*. Конструирование таблицы предсказывающего анализатора. LL(1)-грамматики. Удаление левой рекурсии. Левая факторизация. Рекурсивный спуск. LL(k)-грамматики. Разбор *снизу вверх* типа сдвиг-свёртка. Основа. LR(l)-анализаторы. Конструирование LR(l)-таблицы. LR(l)-грамматики. Варианты LR-анализаторов. LR(*k*)-грамматики.

7. Элементы теории перевода. Синтаксически управляемый перевод. Атрибутные грамматики.

Литература

1. *Ахо А., Сети Р., Ульман Дж.* Компиляторы. Принципы, технологии, инструменты. – М. – СПб. – Киев: Вильямс, 2001.
2. *Мартыненко Б.К.* Языки и трансляции. – СПб.:СПбГУ, 2004. *http://trpl7.ru/t-books/Martin/Martinenko_FLT_Cont.htm*
3. *Серебряков В.А.* [и др.]. Теория и реализация языков программирования. – М.: МЗ-Пресс, 2006. – 352 с.
4. *Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж.* Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. – М.: Вильямс, 2002.
5. *Ахо А., Лам М., Сети Р., Ульман Дж.* Компиляторы. Принципы, технологии и инструментарий. –М.– СПб. – Киев: Вильямс, 2011. – 1184 с.

Задание

Задачи, выделенные в дополнительный раздел, а также задачи, помеченные звёздочкой, являются дополнительными и необязательными. Контрольные вопросы являются полноценными задачами, хотя и выделены в отдельные блоки. Решение всех задач должно быть обосновано. Отдельные указания по необходимости обоснования в некторых задачах являются акцентированием и вовсе не означают, что в других задачах обоснование не требуется. Использование алгоритмов из курса (см. программу), считается обоснованием. При использовании алгоритма проверяющий должен иметь возможность проверить корректность протокола: решения в духе «автомат построен по алгоритму, но вот только ответ» не оцениваются.

Всё вышесказанное относится ко всем письменным работам курса.

Регулярные языки

Задача 1. Определим язык $L \subseteq \{a, b\}^*$ индуктивными правилами:

1) $\varepsilon \in L$;
2) вместе с любым словом $x \in L$ в L также входят слова $bax, baax, bbax, bbaax$;
3) никаких других слов в L нет.

В язык $T \subseteq \{a, b\}^*$ входит пустое слово ε и ВСЕ начинающиеся с b и заканчивающиеся a слова, в которых нет подслов "aaa" или "bbb" (в словах нет трех одинаковых символов подряд).

1. Докажите или опровергните, что $L = T$.[1]

2. Запишите язык T в виде регулярного выражения.

[1]Если равенство неверно, то нужно явно указать слово, принадлежащее одному языку и не принадлежащее другому. Если равенство верно, то нужно провести доказательство по индукции в обе стороны: $L \subseteq T$ и $T \subseteq L$.

3. Постройте конечный автомат, принимающий T. Докажите (по индукции), что построенный автомат принимает язык T.

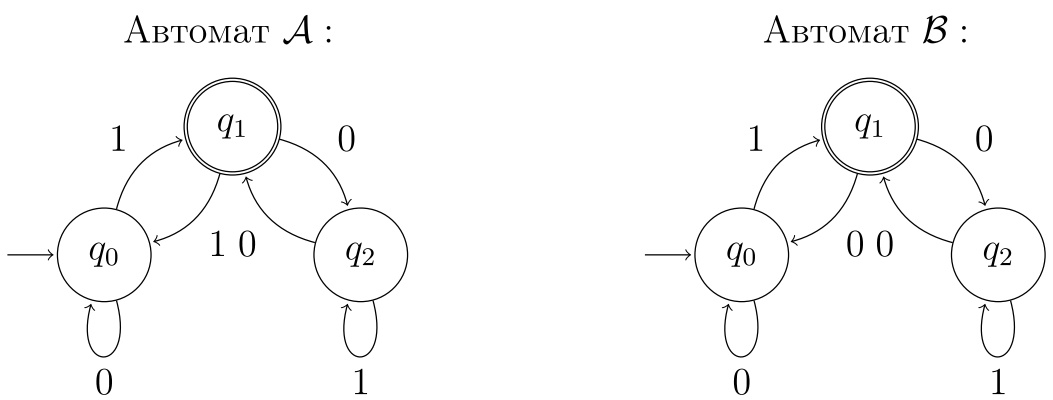
Задача 2. Верно ли, что

1. $\varepsilon \in \{a, aab, aba\}$?
2. $\varnothing \in \{a, aab, aba\}$?

Задача 3. Запишите регулярные выражения для языков:

1. $\{a^n \mid n > 0\} \times \{b^n \mid n \geqslant 0\}$.
2. $\{a^{3n} \mid n > 0\} \cap \{a^{5n+1} \mid n \geqslant 0\}^*$.

Задача 4. Автоматы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ заданы диаграммами. Выполните следующие задания.



Для каждого автомата ответьте на следующие вопросы (1-2).

1. Автомат задан через граф переходов. Запишите определение автомата в виде $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Опишите элементы каждого множества

2. Является ли автомат детерминированным?

Ответьте на вопросы.

3. Опишите последовательность конфигураций автомата $\mathcal{A}$ при обработке слова $w = 011001$. Верно ли, что $w \in L(\mathcal{A})$?

4. Принимает ли автомат $\mathcal{B}$ слово $v = 0101001$?

5. Укажите по одному слову, принадлежащему $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$ и по одному слову, не принадлежащее $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$. Все 4 слова должны быть различными.

Задача 5. Выполните следующие задания.

1. Построить ДКА, принимающий язык L всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, содержащих чётное число нулей и нечётное число единиц.

2. Построить эквивалентную леволинейную грамматику. Будет ли она однозначной?

3. Построить регулярное выражение для языка L^R.

Задача 6. Будут ли регулярными следующие языки?

1. $L = \{a^{2013n+5} \mid n = 0, 1, \} \cap \{a^{503k+29} \mid k = 401, 402, \dots\} \subseteq \{a^*\}$.

2. $L_2 = \{a^{200n^2+1} \mid n = 1000, 1001, \dots\} \subseteq \{a^*\}$.

3. Язык L_3 всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые представляют числа в двоичной записи, дающие остаток два при делении на три (слово читается со старших разрядов). Например, $001010\,(1010_2 = 10_{10} = 3{\times}3{+}1) \notin L_3$, а $10001\,(10001_2 = 17_{10} = 5 \times 3 + 2) \in L_3$.

Задача 7. Постройте НКА, принимающий язык $L_3 = \{$ Множество слов в алфавите $\{0, 1\}$, у которых третий от конца[2] символ равен «1»$\}$. Затем, используя алгоритм, постройте соответствующий полный ДКА.

Задача 8. Порождает ли регулярное выражение $(ab)^*(ba)^*$ тот же язык, что распознаёт ДКА $M = (\{A, B, C, D\},\ \{a, b\},\ \delta,\ A,\ \{A, D, E\})$, где функция переходов задана следующим образом:

$$\delta(A, a) = B,\ \delta(A, b) = C,\ \delta(B, b) = D,\ \delta(C, a) = E,$$

[2] Последний символ слова = первый символ с конца слова.

$$\delta(D,a)=B,\ \delta(D,b)=C,\ \delta(E,b)=C.$$

Задача 9. Покажите, что следующий язык удовлетворяет лемме о разрастании для регулярных языков, но регулярным не является:

$$L=\{a^k b^{2^i} \mid i,k\geqslant 0\}\cup\{b^j \mid j=0,1,\ldots\}.$$

Задача 10. Решите уравнения с регулярными коэффициентами. В каждом пункте нужно выполнить три задания:

1) найти частное решение;
2) найти решение, минимальное по включению;
3) найти все решения.

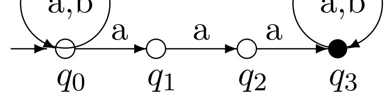
1. $X=((101)^*+110^*)X;$

2. $X=(00+01+10+11)X+(0+1+\varepsilon);$

3. $\begin{cases} Q_0 &= Q_0 0+Q_1 1+\varepsilon\\ Q_1 &= Q_0 1+Q_2 0\\ Q_2 &= Q_1 0+Q_2 1.\end{cases}$

Задача 11. Автомат $\mathcal{A}_1$ задан диаграммой. Выполните следующие задания. Достаточно выполнить хотя бы один из пунктов 2 или 3.

$\mathcal{A}_1:$



1. По диаграмме $\mathcal{A}_1$ постройте праволинейную грамматику G.

2. Запишите определяющую систему уравнений для G. Найдите её наименьшую неподвижную точку и вычислите регулярное выражение α_1 для $L(\mathcal{A}_1)$.

3. Определите регулярное выражение α_2 для $L(\mathcal{A}_1)$ с помощью индуктивного вычисления множеств R_{ij}^k.

4. Выберите какое-нибудь регулярное выражение α_1 или α_2 и постройте НКА $\mathcal{A}_2$ по регулярному выражению.

5. Выберите какой-нибудь НКА $\mathcal{A}_1$ или $\mathcal{A}_2$ и постройте ДКА D_1.

6. Выберите какое-нибудь регулярное выражение α_1 или α_2 и постройте ДКА D_2.

7. Выберите какой-нибудь ДКА D_1 или D_2, дополните его, если нужно, до полного и постройте минимальный полный ДКА $\min \mathcal{A}$ для L. Для каждой пары состояний укажите соответствующие различающие цепочки.

8*. По алгоритму КМП (Кнута–Мориса– Пратта) постройте автомат для L и сравните его с $\min \mathcal{A}$.

Контрольные вопросы

Несмотря на название раздела, все решения задач должны быть строго обоснованы.

Задача 12. Верно ли, что если пересечение языков $L_1,\ L_2 \subseteq \{a, b\}^*$ содержит язык $F = \{a^n b^n \mid n \geqslant 1\} : F \subseteq L_1 \cap L_2$, то хотя бы один из языков L_1 и L_2 является нерегулярным?

Задача 13. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ бесконечное семейство регулярных языков.

1. Верно ли, что язык $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_i$ является регулярным языком?

2. Верно ли, что язык $X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_i$ является регулярным языком?

Задача 14. К языку L_1 добавили конечный язык R и получили язык L ($L = L_1 \cup R$). Язык L оказался регулярным. Верно ли, что язык L_1 мог быть нерегулярным?

Задача 15. Язык задан контекстно-зависимой грамматикой, которая не является контекстно-свободной. Может ли он быть регулярным?

Контекстно-свободные языки

Задача 16. Язык $L^=$ является языком всех слов с равным числом символов a и b.

1. Покажите индукцией[3] по длине слова, что КС-грамматика с правилами $S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid \varepsilon$ порождает язык $L^=$.

2. Грамматика называется линейной, если в правые части правил вывода входит не более одного нетерминала. Покажите, что язык $L^=$ не порождается никакой линейной КСГ.

Задача 17. Палиндромами называют слова, которые одинаково читаются слева-направо и справа-налево, например, «ротор».

1. Покажите, что язык палиндромов в произвольном алфавите является КС-языком.

2. Покажите, что дополнительный язык (язык всех непалиндромов) также является КС-языком.

3. Покажите, что дополнительный язык к языку $U = \{a^n b^n c^n, n = 0, 1, \ldots\}$ является КС-языком.[4]

---

[3] Другие доказательства, кроме индукции, не принимаются.

[4] Так как сам язык U не является КСЯ, то это означает, что в отличие от регулярных языков множество КСЯ не замкнуто относительно дополнения.

Задача 18. Являются ли следующие языки КС-языками?

1. $\{\{a,b\}^* \setminus ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$.
2. $\{a^{3^n} \mid n > 0\}$.

Задача 19. Выполните следующие задания.

1. Постройте магазинный автомат (МА), принимающий язык $L^=$ из задачи **16**.

2*. Постройте детерминированный МА, принимающий тот же язык и приведите доказательство его корректности по индукции.

Задача 20. Для языка

$$L = \{w \mid w = xcy; x, y \in \{a,b\}^*; |x| = |y|\}$$

1) постройте КС-грамматику G, порождающую язык L;

2) постройте недетерминированный МА, эквивалентный этой грамматике;

3) продемонстрируйте работу построенного МА на слове $acab$ (проанализируйте все варианты поведения).

Задача 21. Язык Дика с двумя типами скобок D_2 порождается грамматикой

$$S \to SS \mid (S) \mid [S] \mid \varepsilon.$$

1. Постройте недетерминированный МП-автомат, распознающий язык D_2.

2. Постройте детерминированный МП-автомат, распознающий язык D_2, и приведите доказательство его корректности по индукции.

Задача 22. Заданы грамматика $G = \{\ \{\ A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ S\ \},\ \{a, b\},$ $\{S \to AB \mid C,\ A \to aE \mid a,\ E \to aE \mid \varepsilon,\ B \to bB \mid Bb \mid b,\ C \to CD,$ $F \to ab,\ D \to aba\},\ S\}$ и магазинный автомат $M = (\{q_0\},\ \{a, b\},$ $\{\ S,\ a,\ b,\ A,\ B\ \},\ \{\ \delta(q_0, \varepsilon,\ S) = \{(q_0, AB)\},\ \delta(q_0, \varepsilon,\ A) = \{(q_0, aA), (q_0, a)\},$ $\delta(q_0, \varepsilon,\ B) = \{(q_0, bB), (q_0, b)\}, \delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\},\ \delta(q_0, b, b) = \{(q_0, \varepsilon)\},$ $q_0,\ S\}$, принимающий слова опустошением магазина.

1. Эквивалентны ли грамматика G и N-автомат[5] M?

2. Однозначна ли грамматика G? Если нет, то постройте эквивалентную ей однозначную грамматику.

3. Является ли автомат M детерминированным? Если нет, постройте эквивалентный ему детерминированный МА.

Задача 23. $L_1 = \Sigma^* aab \Sigma^*$, $\Sigma = \{a, b\}$. Язык $L = \{w | w \in \overline{L_1}, |w|_a \geqslant |w|_b\}$.

1. Является ли дополнение языка L КС-языком?

2. Является ли дополнение языка L регулярным языком?

Задача 24. Язык L задан КСГ: $S \to aSa \mid aSb \mid bSa \mid bSb \mid a$.

1. Является ли L регулярным языком?

2. Является ли дополнение L регулярным языком?

3. Является ли L КС-языком?

4. Является ли дополнение L КС-языком?

Задача 25. Язык L задан грамматикой G:

$$S \to aSb \,|\, A \,|\, B \,|\, \varepsilon, \quad A \to aAa \,|\, \varepsilon, \quad B \to bBb \,|\, \varepsilon.$$

1. Является ли L регулярным языком?

2. Является ли дополнение L регулярным языком?

3. Является ли L КС-языком?

4. Является ли дополнение L КС-языком?

[5] Мы называем N-автоматом МП-автомат, допускающий по пустому стеку, а F-автоматом — МП-автомат, допускающий по принимающему состоянию.

Контрольные вопросы

Задача 26. КС-грамматика называется левооднозначной, если каждое слово порождаемого ею языка имеет единственный левый вывод. Аналогично определяется правооднозначная грамматика. Можно ли построить пример левооднозначной, но не правооднозначной КС-грамматики?

Задача 27. Пусть L_1 – КС язык, не являющийся регулярным, а L_2 – не КС-язык. Может ли язык L_2L_1 быть регулярным языком? При положительном ответе привести пример.

Элементы синтаксического анализа

LL-анализ

Задача 28. Определить, являются ли следующие грамматики LL(k)-грамматиками. Если да, указать точное значение k:

а) $S \to Ab,\qquad A \to Aa \mid a;$

б) $S \to Ab,\qquad A \to aA \mid a;$

в) $S \to aAb,\qquad A \to BB,\qquad B \to ab \mid A \mid \varepsilon;$

г) $S \to aAb,\qquad A \to AaAb \mid \varepsilon;$

д) $S \to aB,\qquad B \to aBB \mid b.$

Задача 29. Построить LL(1)-грамматику, эквивалентную грамматике из задачи **26(б)**, и управляющую таблицу для неё.

Задача 30. Написать для грамматики эквивалентную LL(1)-грамматику, построить LL(1)-анализатор и продемонстрировать его работу на слове $baab$.

$$S \to baaA|babA \qquad A \to \varepsilon|Aa|Ab$$

Задача 31*. Докажите, что язык $a^* \cup a^n b^n$ не является LL(1)-языком, то есть не существует LL(1)-грамматики, порождающей этот язык.

Задача 32. Язык L задан неоднозначной КС-грамматикой

$$G = \{\{S\}, \{(,)\}, \{S \to (S) \mid SS \mid ()\}, S\}.$$

Написать LL(1)−грамматику для языка L.

Контрольные вопросы

Задача 33. Существует ли такая праволинейная (не обязательно регулярная праволинейная) грамматика, которая не является LL(1)-грамматикой?

Задача 34. В приведённой грамматике[6] G есть правило $S \to AB$ и при этом $\mathrm{FIRST}(A) \cap \mathrm{FIRST}(B) = \varepsilon$. Верно ли, что грамматика G может быть LL(1)-грамматикой?

Задача 35. Пусть для некоторых двух нетерминалов A и B приведённой КС-грамматики G пересечение $\mathrm{FOLLOW}(A) \cap \mathrm{FOLLOW}(B)$ оказалось непустым. Верно ли, что грамматика G не является LL(1)-грамматикой?

[6]Грамматика называется приведённой, если в ней нет недостижимых и бесплодных символов. В литературе также встречаются неэквивалентные определения этого термина.

LR-анализ

Задача 36. Дана грамматика $G = \{ \{A, S\}, \{a, b, c\}, \{ S \to Aa \mid b \mid \varepsilon;\ A \to Ab \mid c \},\ S \}$. Является ли грамматика G LR(k)−грамматикой? При положительном ответе на вопрос найти минимальное k и построить соответствующий анализатор. Построить дерево разбора для цепочки $cbba$.

Задача 37. Дана грамматика $G = \{ \{A, S\}, \{a\}, \{ S \to A;\ A \to aAa \mid a \},\ S\}$. Является ли грамматика G LR(k)−грамматикой? При положительном ответе на вопрос найти минимальное k и построить соответствующий анализатор. Построить дерево разбора для цепочки $aaaaa$.

Задача 38. Дана грамматика $G = \{ \{A, S\}, \{a, b, c\}, \{S \to Aa \mid b;\ A \to Ab \mid c \},\ S \}$. Является ли грамматика G LR(k)−грамматикой? При положительном ответе на вопрос найти минимальное k и построить соответствующий анализатор. Продемонстрировать работу анализатора на цепочке $cbbab$.

Задача 39. Зафиксируем КС-грамматику G и рассмотрим множество её LR(0)-ситуаций. Будем говорить, что между двумя ситуациями $\alpha.X\beta$ и $\alpha X.\beta$ определён переход по $X \in N \cup T$. Конечный автомат, в качестве состояний которого выступают LR(0)-ситуации, а переходы определены по правилу, указанному выше, называют LR(0)-автоматом или автоматом Кнута.

1. Выпишите все LR(0)-ситуации для грамматики G, заданной правилами $S \to aS \mid b$.

2. Постройте автомат Кнута для грамматики G.

3. Постройте LR(0)-анализатор для грамматики G. Сравните автомат Кнута с таблицей переходов LR(0)-анализатора для грамматики G.

Задача 40. Грамматика G задана правилами

$$S \to Ab, \quad A \to aAa, \quad A \to B, \quad B \to b.$$

1. Построить LR(1) и LR(0)-анализаторы для грамматики G по алгоритму из курса.

2. Постройте LR(0)-анализатор по LR(1)-анализатору из пункта 1 следующим образом. Сотрите все аванцепочки и постройте управляющую таблицу LR(0)-анализатора по получившемуся автомату Кнута. Верно ли, что полученный LR(0)-анализатор является аналиазтором для грамматики G? То есть для любого слова, порождаемого G, анализатор строит корректный правый разбор, а слова не порождаемые G, анализатор отвергает.

3. Покажите, что LR(0)-анализатор для грамматики G из пункта 1 можно построить путём детерминизации LR(0)-автомата, полученного из LR(1)-анализатора в пункте 2.

Контрольные вопросы

Задача 41. При построении LR(1)−анализатора для грамматики G в одном множестве оказались ситуации $[A \to .aA\alpha, b]$ и $[B \to \beta.a, a]$, где α, β некоторые цепочки из $(N \cup T)^*$. Может ли грамматика G быть LR(0)-грамматикой?

Атрибутные грамматики

Атрибутные грамматики являются исключительно важными для понимания роли всего изученного материала (теории) в процессе реализации компиляторов для языков программирования. Однако, их изучение приходится на конец курса, поэтому мы приводим в этом разделе теоретический материал, подготовленный С.П. Тарасовым, для облегчения изучения небольшой части этой значительной темы, которая входит в наш курс.

Об атрибутных грамматиках можно прочитать в книге Серебрякова. Они встречались в дополнительных вопросах на экзамене. Неформально, определение атрибутов для данной КС-грамматики G приписывает каждому выводу в G некоторое *индуктивное вычисление*. Поскольку индуктивное вычисление по выводу (дереву вывода) может идти как снизу вверх, так и сверху вниз, то технически правилам вывода G приписываются т.н. *синтезируемые атрибуты, вычисляемые снизу вверх через атрибуты потомков* и *наследуемые атрибуты, вычисляемые сверху вниз через атрибуты предков*.

Говоря формально[7], с каждым символом $X \in V$ связывается конечное множество атрибутов $A(X)$, которое разбивается на два непересекающихся множества: множество синтезированных атрибутов $A_0(X)$ и множество унаследованных атрибутов $A_1(X)$. Множество $A_1(S)$ должно быть пустым (то есть начальный символ S не должен иметь унаследованных атрибутов); аналогично, множество $A_0(X)$ пусто, если X — терминальный символ. Каждый атрибут α из множества $A(X)$ имеет (возможно, бесконечное) множество значений $V\alpha$. Для каждого вхождения X в дерево вывода семантические правила позволяют определить одно значение из множества $V\alpha$ для соответствующего атрибута.

Пусть G состоит из m правил, и пусть p-е правило имеет вид $X_{p0} \to X_{p1}X_{p2}\dots X_{pn_p}$, где $n_p \geqslant 0$, $X_{p0} \in N$ и $X_{pj} \in V$ для $1 \leqslant j \leqslant n_p$. Семантическими правилами называются функции $F_{pj\alpha}$, определённые для всех $1 \leqslant p \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant n_p$ и некоторых $\alpha \in A_0(X_{pj})$, если $j = 0$, или $\alpha \in A_1(X_{pj})$, если $j > 0$. Каждая такая функция представляет собой отображение из $V\alpha_{1\times}V\alpha_{2\times}\dots \times V\alpha_t$ в $V\alpha$ для некоторого $t = t(p, j, \alpha) \geqslant 0$, где все $\alpha_i = \alpha_i(p, j, \alpha)$ являются атрибутами некоторых Xpk_i, при $0 \leqslant k_i = k_i(p, j, \alpha) \leqslant n_p, 1 \leqslant i \leqslant t$. Другими словами, каждое семантическое правило отображает значения некоторых атрибутов символов $X_{p0}, X_{p1}, \dots, X_{pn}$ и значение некоторого атрибута символа X_{pj}.

С одной стороны, задание атрибутов удобно для моделирования семантики языков программирования. Однако, это вычислительное средство является настолько мощным, что практически трудно реализуемы уже простейшие проверки корректности системы атрибутов (см. об этом приложения **A** и **B** в книге Серебрякова). Это в значительной степени ограничивает их применение. Тем не менее, мне кажется, что очень полезно ознакомиться со статьей Д.Кнута (приложение **A** в книге Серебрякова) и иметь в виду, что *незацикленность* является разрешимой, хотя и очень трудоемкой (экспоненциальной по входу) задачей.

[7] Далее идет заимствование из оригинальной статьи Д.Кнута, перевод которой приведён в книге Серебрякова

Рассмотрим грамматику[8]

$$G = \{\{S, L, B\},\ \{0, 1\},\ \{S \to L \mid L.L,\ L \to B \mid LB,\ B \to 0 \mid 1\},\ S\}.$$

В грамматике G можно вывести произвольные двоичные числа (нетерминалы B (bit) и L (list) интерпретируются, соответственно, как *бит* и *последовательность битов*). Рассмотрим два варианта *атрибутов*, позволяющих в процессе вывода вычислять десятичное значение выводимого числа.

Список атрибутов 1.

- B имеет целочисленный атрибут "*значение*", обозначаемый $v(B)$.
- L имеет целочисленные атрибуты "*длина*", обозначаемый $l(B)$, и "*значение*", обозначаемый $v(L)$.
- S имеет атрибут "*значение*", являющийся рациональным числом и обозначаемый $v(N)$.

Семантические правила 1.

$$\begin{array}{lll}
B \to 0 & v(B) = 0 & \\
B \to 1 & v(B) = 1 & \\
L \to B & v(L) = v(B), & l(L) = 1 \\
L \to LB & v(L_1) = 2v(L_2) + v(B), & l(L_1) = l(L_2) + 1 \\
S \to L & v(S) = v(L) & \\
S \to L.L & v(S) = v(L_1) + v(L_2)/2^{l(L_2)} &
\end{array}$$

(Индексы в четвёртом и шестом правилах применяются для того, чтобы различать вхождения одноимённых нетерминалов.)

Список атрибутов 2.

- B имеет рациональный атрибут "*значение*", обозначаемый $v(B)$, и целочисленный атрибут "*масштаб*", обозначаемый $s(B)$.

[8]Взята из уже цитированной статьи Д.Кнута, помещенной в виде приложения к книге Серебрякова.

- L имеет рациональный атрибут “*значение*”, обозначаемый $v(L)$, целочисленный атрибут “*длина*”, обозначаемый $l(L)$, и целочисленный атрибут “*маситаб*”, обозначаемый $s(L)$.
- N имеет рациональный атрибут “*значение*”, обозначаемый $v(N)$.

Семантические правила 2.

$$
\begin{array}{ll}
B \to 0 & v(B) = 0 \\
B \to 1 & v(B) = 2^{s(B)} \\
L \to B & v(L) = v(B), \quad s(B) = s(L), \\
 & l(L) = 1 \\
L_1 \to L_2 B & v(L_1) = v(L_2) + v(B), \quad s(B) = s(L_1), \\
 & s(L_2) = s(L_1) + 1, \quad l(L_1) = l(L_2) + 1 \\
S \to L & v(S) = v(L), \quad s(L) = 0 \\
S \to L_1.L_2 & v(S) = v(L_1) + v(L_2), \quad s(L_1) = 0, \\
 & s(L_2) = -l(L_2)
\end{array}
$$

Здесь при записи семантических правил принято следующее соглашение. Правая часть каждого правила представляет собой определение левой части, таким образом, $s(B) = s(L)$ означает, что сначала должно быть вычислено $s(L)$, а затем полученное значение следует присвоить $s(B)$.

Задача 42.

1. Перечислите синтезируемые и наследуемые атрибуты для обоих систем семантических правил.

2-3. Для каждой из описанных выше систем атрибутов и семантических правил вычислите десятичное значение двоичного числа 100.001001

Дополнительные задачи

В этот раздел входят задачи для подготовки к контрольным и экзаменам, а также задачи повышенной сложности для студентов, претендующих на высокие оценки. Задачи данного раздела не являются обязательными для прохождения процедуры сдачи задания, если противное не указано семинаристом. Во всех письменных общекурсовых работах значение k в задачах на построение LR(k)-анализаторов не превосходит единицу.

Регулярные языки

Задача 43. Пусть X регулярный язык. Верно ли, что язык $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\Sigma^* \setminus X)^n$ является регулярным?

Задача 44. Приведите пример бесконечного регулярного языка $X \subset \{a, b\}^*$, отличного от множества всех слов, такого что $X \cap (\Sigma^* \setminus X)^R = X$.

Задача 45. Найдите разбиение на минимальное число классов правоинвариантной (И/ИЛИ левоинвариантной) эквивалентности, которые индуцируют следующие языки.

1. Язык, порождаемый выражением $00(10 + 01)^*$.
2. Язык $\{a^{n^2} \mid n \geqslant 0\}$ в однобуквенном алфавите.

КС-языки

Задача 46. Язык L задан грамматикой G:

$$S \to bSa \mid AB \mid \varepsilon, \quad A \to bAb \mid b, \quad B \to aBa \mid \varepsilon.$$

Является ли язык L и его дополнение регулярным языком, КС-языком?

Задача 47. Являются ли следующие языки КС-языками:

1. $\{x \mid x \in \{c, b\}^*, |x|_c = |x|_b, \forall u, v : x = uv, |u| \neq 0, |v| \neq 0, |u|_c > |u|_b\}$.

2. $\{a^{3^n} \mid n > 0\}$

Задача 48*. Пусть – МА. Построите МА B, принимающий все префиксы языка $L(A)$, т.е. язык $L(B) = \{x \mid \exists y : xy \in L(A)\}$.

Задача 49. Для языка

$$L = \{w \mid w = xc^{3k}y; x, y \in \{a, b\}^*; |xy|_a = 2n;\ n, k \geqslant 0\}$$

($|xy|_a$ – число символов a в слове xy)

1) постройте КС-грамматику G, порождающую язык L;

2) постройте недетерминированный МА, эквивалентный этой грамматике;

3) продемонстрируйте работу построенного МА на слове $accab$ (проанализируйте все варианты поведения).

Задача 50. Заданы языки $L_1 = \{a^n b^n c^m : n \geqslant 1, m \geqslant 0\}$ $L = \{f^n a^m b^m : n \geqslant 0, m \geqslant 0\}$. Для языка $L_1 \cup L_2$ построить однозначную КС-грамматику и детерминированный МП-автомат. Решение обосновать.

Элементы синтаксического анализа

Задача 51. Язык L задан неоднозначной КС-грамматикой

$$G = \{\, \{S\},\ \{a, .\,,^{\wedge}, [\,,]\,, (\,,)\,\},\ \{\, S \to a \mid S.S \mid S[S] \mid S^{\wedge} \mid S(S)\,\},\ S\,\}.$$

Написать LL(1)−грамматику для языка L.

Задача 52. Дана грамматика $G = \{\ \{A, B, C, D, E, S\},\ \ \{a, b\},$ $\{S \to AB,\ A \to a,\ B \to CD \mid aE,\ C \to ab,\ D \to bb,\ E \to bba\ \},\ S\ \}$. Является ли грамматика G LR(k)−грамматикой? При положительном ответе на вопрос найти минимальное k и построить соответствующий анализатор. Продемонстрировать работу анализатора на цепочке $aabbb$.

Задание составил А.А. Рубцов, ассистент

С методическими материалами по курсам кафедры МОУ можно ознакомиться на страницах:

http://www.mou.mipt.ru, http://trpl7.ru,
http://lrk.umeta.ru, http://rubtsov.su.