

Задание 8

Контекстно-свободные языки и магазинные автоматы

Ключевые слова ¹: язык, контекстно-свободный язык, магазинный автомат, грамматика, метод математической индукции.

1 МП-автоматы

1.1 Определения

Моделью вычислений, распознающей класс контекстно-свободных языков (CFL), является автомат с магазинной памятью.

Под магазинной памятью понимается стек. Вы должны быть знакомы со стеком из курса алгоритмов, но на всякий случай я скажу про него пару слов. Неформально, стек – это стопка, например такая как колода карт. Работать со стеком можно следующим образом: карты можно брать только последовательно с верхушки колоды – если вы хотите вытащить вторую карту, то сначала вы должны взять первую, класть карты можно только на верх колоды. Сколько карт в колоде вы не знаете, а знаете только пуста колода или нет.

Формально, под стеком понимается следующая структура данных:

- элементы стека располагаются в порядке добавления, первый элемент, добавленный в стек называется *дном*, последний элемент, добавленный в стек, называется *верхушкой*;
- операция $push(a)$ добавляет элемент a в стек, причём a становится верхушкой стека;
- операция $pop()$ возвращает элемент a , находящийся на верхушке стека;
- операция $empty()$ проверяет пустоту стека и возвращает истинное значение, если стек пуст.

¹минимальный необходимый объем понятий и навыков по этому разделу)

Магазинные автоматы встречаются куда более чаще, чем стековые, но называются они магазинными, потому что на заре этой науки кто-то застолбил название стековые автоматы и под ними стали пониматься такие автоматы со стеком, что автомат мог просматривать содержимое стека, не меняя его содержания, а менять его только согласно правилам работы со стеком, что сильно меняло класс языков, распознаваемых автоматом: например, язык $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ не распознаётся ни одним МП-автоматом, но распознаётся стековым автоматом.

Теперь дадим формальное определение автомату с магазинной памятью.

Определение 1. Магазинный автомат содержит семь компонент и выглядит следующим образом: $P = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z_0, \delta, F)$, где

- Σ – входной алфавит;
- Γ – алфавит стека, т. е. символы, которые можно добавлять в стек;
- Q – множество состояний автомата;
- $q_0 \in Q$ – начальное состояние автомата;
- $Z_0 \in \Gamma$ – единственный символ, находящийся в стеке при начале работы автомата;
- $\delta : Q \times \{\Sigma \cup \varepsilon\} \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$ – функция переходов;
- F – множество принимающих состояний.

В начале работы автомат находится в состоянии q_0 и в магазине лежит только символ Z_0 . За такт работы, автомат считывает букву из входного слова (или же не считывает и тогда выполняет ε -переход) и действует согласно одному из правил перехода. А именно, пусть автомат находится в состоянии q , на верхушке стека лежит символ $z \in \Gamma$ и автомат считывает букву σ . Тогда автомат выбирает одну из пар $(q', \gamma) \in \delta(q, \sigma, z)$, переходит в состояние q' , снимает с верхушки символ z и добавляет в стек слово γ , причём, если $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$, то γ_n оказывается снизу, а γ_1 сверху. Автомат завершает работу с ошибкой, если не может выполнить переход, а входное слово ещё не обработано.

Выделяют два типа магазинных автоматов, которые различаются по условию приёма входного слова. В первом случае, автомат P принимает слово w , если существует такая последовательность переходов, что в результате обработки слова, он оказался в принимающем состоянии, в этом случае автомат P является *допускающим по заключительному состоянию*. Во втором случае, автомат P принимает слово w , если существует такая последовательность переходов, что в результате² обработки слова, стек автомата оказался пуст, в этом случае автомат называется *допускающим по пустому магазину*.

Замечание 1. Если $\delta(q, \sigma, z) = \{(q_1, \gamma_1), (q_2, \gamma_2)\}$, то автомат выбирает одну из пар и при переходе в состояние q_1 автомат помещает в стек γ_1 , а при переходе в q_2 , автомат помещает в стек γ_2 . Автомат **не может** перейти в q_1 , а в стек положить γ_2 !

Определение 2. Конфигурацией МП-автомата называется элемент множества $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$. При начале работы на входе w автомат P находится в конфигурации (q_0, w, Z_0) . За такт работы автомат изменяет конфигурацию, согласно правилам перехода. Если автомат находился в конфигурации $(q, \sigma v, Z_n \dots Z_2 Z_1 Z_0)$ и $\delta(q, \sigma, Z_n) = \{(q_1, \gamma_1), (q_2, \gamma_2)\}$, то автомат либо переходит в конфигурацию $(q_1, v, \gamma_1 Z_{n-1} \dots Z_1 Z_0)$, либо в $(q_2, v, \gamma_2 Z_{n-1} \dots Z_1 Z_0)$. Верхушка стека в цепочке $Z_n \dots Z_2 Z_1 Z_0 \in \Gamma^*$ находится слева, дно стека находится справа.

На множестве конфигураций автомата P введено отношение \vdash_P , такое что если из конфигурации c_1 согласно функции перехода P есть переход в конфигурацию c_2 , то $c_1 \vdash_P c_2$. Когда ясно о каком автомате идёт речь, мы будем опускать индекс отношения. Так, $(q, \sigma v, Z_n \dots Z_2 Z_1 Z_0) \vdash (q_1, v, \gamma_1 Z_{n-1} \dots Z_1 Z_0)$

Замечание 2. При выполнении такта работы, автомат всегда снимает символ с верхушки стека. Например, если изначально автомат находился в конфигурации (q_0, av, Z_0) и перешёл в конфигурацию (q, v, aZ_0) , то правило, которое он применил выглядит как $(q, aZ_0) \in \delta(q_0, a, Z_0)$. Кстати, в отличие от грамматик, входной алфавит и алфавит стека могут пересекаться. То есть, условие $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$ **не** налагается.

²под «в результате» понимается что после обработки слова w стек оказался пуст. Если стек оказался пуст в процессе обработки слова, т.е. когда слово ещё не было прочитано до конца, то это не означает, что слово было принято автоматом

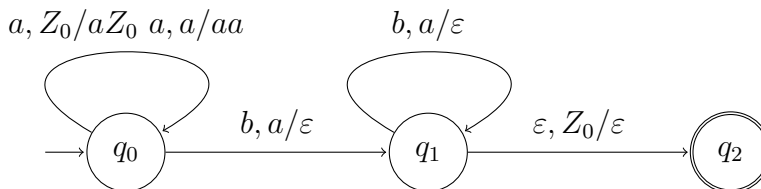
Напомним, что *рефлексивным и транзитивным замыканием* бинарного отношения $R \subseteq A \times A$ называется минимальное рефлексивное и транзитивное бинарное отношение R^* , содержащее R . То есть, для любого a из A выполняется $(a, a) \in R$, и если $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$, то $(a, c) \in R^*$, даже если $(a, c) \notin R$. Кроме того, отношение R^* само по себе является транзитивным, то есть, если $(a, b) \in R^*$ и $(b, c) \in R^*$, то и $(a, c) \in R^*$.

Упражнение 1. Загадка. Почему описанное отношение обозначают R^* ?

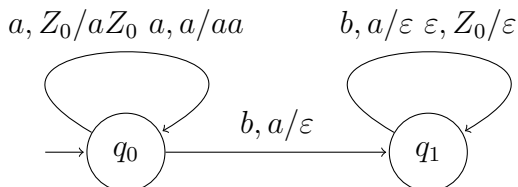
Определим условие приёма слова w автоматом P через транзитивное замыкание отношения \vdash . Если автомат P является допускающим по принимающему состоянию, то $w \in L(P)$ тогда и только тогда, когда $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma)$, где $q \in F$, $\gamma \in \Gamma^*$. Если автомат P является допускающим по пустому магазину, то $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$, где $q \in Q$ — не обязательно принимающее состояние.

1.2 Примеры

Графически магазинные автоматы задаются следующим образом: для каждого правила $\delta(q, \sigma, Z) = (p, \gamma)$ на переходе из состояния q в состояние p пишут $\sigma, Z/\gamma$. Если автомат принимает слово по пустому магазину, то принято считать, что $F = \emptyset$ (или вовсе не упоминать F при описании МА).



Данный автомат является допускающим по завершающему состоянию.



Данный автомат является допускающим по пустому стеку.

Упражнение 2. Показать, что данные автоматы распознают язык $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$.

Определение 3. Магазинный автомат P является *детерминированным*, если выполняются следующие два условия: 1) множество $\delta(q, \sigma, Z)$ содержит не более одного правила $\forall \sigma \in \Sigma, \forall Z \in \Gamma$; 2) если для символа σ , $\delta(q, \sigma, Z) \neq \emptyset$, то $\delta(q, \varepsilon, Z) = \emptyset$. То есть, все переходы в автомате P определены однозначно и в случае когда из пары (q, Z) есть ε -переход, то других переходов из данной пары нет.

Упражнение 3. Показать, что автоматы, изображённые на диаграммах являются детерминированными.

Классическим примером КС-языков являются языки Дика. А именно, языком типа D_n будем называть язык состоящий из правильных скобочных выражений с n типами скобок. Формально, язык D_n определён над размеченным алфавитом $\Sigma = \Sigma_n \cup \bar{\Sigma}_n$ – в Σ_n входят открывающиеся скобки, в $\bar{\Sigma}_n$ закрывающиеся. Определим языки Дика индуктивно.

Определение 4. Язык Дика D_n задан грамматикой $S \rightarrow \varepsilon \mid \sigma_i S \bar{\sigma}_i \mid SS$, где $i \in 1..n$.

Скобочным итогом i -го типа слова w , назовём число $\|w\|_i = |w|_{\sigma_i} - |w|_{\bar{\sigma}_i}$. Если w является правильным скобочным выражением, то для любого префикса $p : w = ps$ и любого $i \leq n$ справедливо $\|p\|_i \geq 0$ и $\|w\|_i = 0$. То есть,

$$w \in D_n \Rightarrow \forall i \leq n, \forall k \leq |w|, \|w[1, k]\|_i \geq 0, \|w\|_i = 0$$

Упражнение 4. Показать, что обратное неверно.

2 Задачи

В случае, когда в задаче указано, что требуется доказательство корректности по индукции, это является уточняющим требованием: во всех задачах на построение объектов требуется доказательство корректности.

Задача 1. Постройте МП-автомат, распознающий язык палиндромов PAL над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$.

Задача 2. Язык Дика с двумя типами скобок D_2 порождается грамматикой

$$S \rightarrow SS \mid (S) \mid [S] \mid \varepsilon.$$

1. Постройте недетерминированный МП-автомат, распознающий язык D_2 .
2. Постройте детерминированный МП-автомат, распознающий язык D_2 , и приведите доказательство его корректности по индукции.

Задача 3. Постройте МП-автомат, распознающий язык непалиндромов над двоичным алфавитом $\Sigma^* \setminus \text{PAL}$.

Задача 4. Построить КС-грамматику G , порождающую L или МП-автомат M , распознающий L .

1. $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee i = k; i, j, k \geq 0\}$

2*. $L = \{w \mid w = uv \Rightarrow u \neq v\}$, то есть $w \in L$ непредставимо в виде uu .

Задача 5. Докажите, что класс КС-языков замкнут относительно операции пересечения с регулярным языком.