Октябрьская контрольная по ТРЯП
решения и критерии

ФПМИ 2021

Разбалловка и общие положения

неуд	удовл	хорошо	отлично
$0 \leqslant \Sigma < 10$	$10 \leqslant \Sigma < 15$	$15 \leqslant \Sigma < 22$	$22 \leqslant \Sigma \leqslant 28$
1: [0, 5), **2:** [5, 10)	**3:** [10, 13), **4:** [13, 15)	**5:** [15, 18), **6:** [18, 20), **7:** [20, 22)	**8:** [22, 24), **9:** [24, 27), **10:** [27, 28]

Приведённые ниже критерии оценивания выработанны с учётом типовых ошибок и определяют общую политику проверки, однако заведомо не могут покрыть всевозможные случаи. При некритериальном случае, проверяющий оценивает решение исходя из здравого смысла и духа критериев.

Напоминаем положения, указанные в преамбуле к контрольной.

1. Ответы, включая правильные, при отсутствии решений оцениваются в 0 (ноль) баллов.

2. Объекты, полученные «методом внимательного вглядывания», без доказательства корректности построения оцениваются в 0 (ноль) баллов.

3. При формулировке вопроса «верно ли, что», в случае положительного ответа приведите доказательство, а в случае отрицательного – контрпример. Верное рассуждение без контрпримера оценивается в половину задачи.

Критерии проверки и некоторые ответы, указания и решения

Тестовые задачи

Выберите все верные варианты ответов и только их. Обоснование не требуется

1 (2). Отметьте номера позиций всех символов, входящих в множество followpos(1), для РВ

$$(b_1|a_2a_3b_4)^*(a_5a_6b_7|a_8^*) \lhd_9 \ .$$

- ☑ 1
- ☑ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☑ 5
- ☐ 6
- ☐ 7
- ☑ 8
- ☑ 9

Отметьте номера позиций всех символов, входящих в множество followpos(4), для РВ

$$((a_1^*|b_2b_3)a_4^*(b_5b_6b_7|a_8^*))^* \lhd_9 \ .$$

- ☑ 1
- ☑ 2
- ☐ 3
- ☑ 4

- ☑ 5
- ☐ 6
- ☐ 7
- ☑ 8
- ☑ 9

Критерии.

-1 одна ошибка

0 две и более ошибок

2 (4). В каждом пункте выберите квантор из «для любых»$=\forall$, «лишь для некоторых» $=$ S, «ни для каких» $= \nexists$ так, чтобы утверждение пункта стало верным.

Обозначения: $[u]$ — класс эквивалентности Майхилла-Нероуда, $[u]_R$ — правый контекст слова u (языка L или $\mathrm{Suff}(S)$ в зависимости от пункта).

1. $\forall S \in \Sigma^+$ $\boxed{\text{S}}$ $u, v \in \mathrm{Suff}(S)$: если $\mathrm{endpos}(u) \cap \mathrm{endpos}(v) \neq \varnothing$, то $[u]_R = [v]_R$
2. $\forall L \subseteq \Sigma^*$ $\boxed{\forall}$ $u, v \in \Sigma^* : [u] \cap [v] \neq \varnothing \Rightarrow [u]_R = [v]_R$
3. $\forall S \in \Sigma^+$ $\boxed{\forall}$ $u, v \in \mathrm{Suff}(S)$: если u — суффикс v, то $[u]_R \cap [v]_R \neq \varnothing$
4. $\forall S \in \Sigma^+$ $\boxed{\text{S}}$ $u, v \in \mathrm{Suff}(S)$: $\mathrm{endpos}(u) \subsetneq \mathrm{endpos}(v) \Rightarrow [u] = [v]$

Критерии. В пункте 4 также засчитывается ответ $\nexists$ (он был указан как верный в прошлй версии критериев). При составлении задачи составитель допустил ошибку: переписал утверждение на естественном языке «Не существует таких слов u и v, что $\mathrm{endpos}(u)$ — собственное подмножество $\mathrm{endpos}(v)$ и классы эквивалентности Майхилла-Нероуда у u и

v совпадают» в кванторах с помощью импликации. Из-за использования импликации утверждение формально истинно при некоторых u и v — когда посылка ложна. Поскольку произошла двойная ошибка (неверный ответ попал в критерии) и студенты, ответившие $\nexists$, востановили на естественном языке задуманное утверждение, было решено засчитывать также формально неверный ответ $\nexists$.

-1 1 ошибка

-3 2 ошибки

0 3-4 ошибки

Контрольные вопросы

Обоснованно ответьте на вопрос

3 (2). Докажите или опровергните следующее утверждение. Если $L \in \mathsf{REG}$, то

$$\exists N, C \in \mathbb{N}_1 : \forall u, w \in L : (|u| > N) \wedge (|w| - |u| > C) \Rightarrow \exists v \in L : |u| < |v| < |w|.$$

Указание. Утверждение верно. Возьмём в качестве N и C константу p леммы о накачке, «накачав» u получим слово v.

Критерии.

0 (типовая ошибка) В качестве «контрпримера» приведён конечный язык

4 (3). Определим операцию $\hat{L}$ над языками: $\hat{L} = \{w \mid w \notin L, \exists x \in L : |x| = |w|\}$.

Рассмотрим следующий класс языков:

- $\varnothing, \{\varepsilon\}, \{a\}$ для любого $a \in \Sigma$ входят в класс;
- если языки X и Y входят в класс, то $X \cup Y, X \cdot Y, \hat{X}$ входят в класс;
- другие языки в класс не входят.

Верно ли, что данный класс совпадает с классом регулярных языков?

Указание. Ответ: нет. Каждый язык из определённого класса конечен.

Критерии.

0 Неправильный ответ

Задача 5 (2). Пусть L — нерегулярный язык. Верно ли, что язык $L_{pref} = \{x \mid \exists w : xw \in L\}$ также нерегулярный?

Указание. Неверно. Взяв язык $L_= = \{w : |w|_a = |w|_b\}$ получим, что $L_{pref} = \Sigma^*$

Критерии.

+1 Приведён верный пример языка L и L_{pref}

+1 Доказана нерегулярность L (допустима ссылка на классические примеры из курса без неверных уточнений)

Задачи

Приведите обоснованное решение

6 (5). Постройте минимальный автомат, распознающий язык

$$L = \{w : w \in \Sigma^* aab, \exists k \in \mathbb{N}_0 : |w|_a = 2k\}.$$

Указание. Строим КМП-автомат, строим автомат для чётного числа букв a, применяем конструркцию произведения, минимизация

Критерии.

+1 балл за каждый шаг, +1 балл за итоговый верный результат (если всё без ошибок). При альтернативных решениях задача оценивается исходя из соизмеримости с шагами

7 (3). Постройте для множества $S = \{a, ab, bc, abc, cabc\}$ автомат Ахо-Корасик. Посчитайте с его помощью (или с помощью ДКА Ахо-Корасик) количество различных вхождений слов из словаря S в слово $w = bcabca$ в качестве подслов.

Критерии.

+0,5 построен автомат-словарь

+0,5 построен автомат Ахо-Корасик

+0,5 расставлены числа для подсчёта вхождений

+1,5 демонстрация и верный ответ

-0,5 незначительная ошибка в ходе демонстрации

8 (3). Пусть L — язык в алфавите $\{a, b, \#\}$. Слова языка $L_\#$ получены следующей операцией, примененной ко всем словам L: одновременным удалением всех символов # и всех символов, идущих непосредственно перед # (в случае нескольких подряд идущих # удаляется только символ перед первым). Так, если $L = \{aa, aa\#\#b, a\#bb\#\}$, то $L_\# = \{aa, ab, b\}$. Верно ли, что для любого регулярного языка L, язык $L_\#$ является регулярным?

Указание. Возьмём НКА, распознающий язык L. если из состояния q в состояния p есть путь вида $a\#^+$, проведём переход $q \xrightarrow{\varepsilon} p$, после чего удалим все переходы по #.

Решение:Утверждается, что автомат, распознающий $L_\#$ можно получить следующими преобразованиями НКА, распознающего L: 1)Добавление нового начального состояния, ε-переходов из него в старое начальные сосстояние и в состояния, в которые можно было перейти из начального только по символам $\#, \varepsilon$; 2)Добавление ε-переходов между всеми парами состояний q, p из q в p, таких что $\exists a \in \Sigma : q \xrightarrow{a\#^+} p$ 3)Удаление всех переходов по #, Докажем, что это корректно, то есть $\forall w_\#$:$w_\#$ принимается перестроенным автоматом $\exists w \in L$, $w_\#$ получено применением операции к w и $\forall w \in L$ слово $w_\#$, полученное применением операции к w принимается перестроенным автоматом.

Сначала докажем первое утверждение. Для этого докажем более сильное утверждение; $\exists w \in L$, при обработке которого исходным автоматом мы переходим (под переходами здесь понимается именно путь, приводящий в принимающее состояние) в те же состояния, кроме быть может стартового, и в том же порядке, что и при обработке $w_{\#}$ перестроенным, но, быть может, проходя кроме них через некоторые другие. Докажем это индукцией по длине $w_{\#}$ — будем строить его посимвольно. База — до считывания первого символа автомат мог либо остаться в новом стартовом состоянии либо перейти в старое, либо перейти по другим ε переходам, определенным выше как первый шаг построения. Первый случай нас не интересует, поскольку из нового стартового состояния ведут только ε переходы. Для второго возьмем пустой префикс w, для третьего - ту последовательность $\#$, по которой изначальный автомат мог перейти в соответствующее состояние (такая последовательность существует в силу определения переходов).Заметим, что все вышеперечисленное после применения операция становится пустым словом. Два варианта переходов: 1) осуществляется по символу алфавита, либо по ε, существовавшему в старом автомате. Тогда допишем к $w_{\#}$ соответствующий символ и он перейдет в себя после применения операции(из дальнейшего ясно,что следующим после него символом не будет $\#$). 2) осуществлялся по ε и это один из добавленных переходов. Заметим, что мы не добавляли переходов в новое стартовое состояние, а это означает, что данный переход был получен на шаге 2. Но тогда при обработке соответствующего ему $a\#^+$ автомат мог перейти в то же состояние, что и по новому ε переходу; после применения операции данное подслово перейдет в пустое. Таким образом обрабатывая каждый переход $w_{\#}$ мы получили слово w, которое принимается изначальным автоматом. Но по построению после применения операции w перейдет в $w_{\#}$, что и требовалось.

Второе утверждение доказывается аналогично: мы получаем, что для любой последовательности подряд идущих $\#$ и символа алфавита перед ними перестроенный автомат может вместо всех этих переходов перейти по ε(заметим, что именно так мы и определяли добавленные переходы на шаге 2).Аналогично - для переходов, добавленных в шаге 1 и символов $\#$ в начале. Тогда для слов из L после применения операции при их обработке существует последовательность переходов, переводящая автомат в финальное состояние, что и требовалось получить.

Критерии.

0 Перебор без доказательств (в том числе неполный или недоказанный полный перебор)

9 (4). $\Sigma = \{\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow\}$. Введём функцию $go\colon \Sigma^* \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, соответствующую операции перемещения в двумерной целочисленной плоскости из точки $(0,0)$ в финальную точку маршрута, заданного последовательностью стрелок (словом в алфавите Σ).
Так, $go(\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow) = (3,2)$, $go(\leftarrow\uparrow\rightarrow\downarrow) = (0,0)$.

Пусть слово-путь из точки $(0,0)$ принадлежит языку L в том и только в том случае, если существует луч, исходящий из точки $(1,1)$ и не пересекающий траекторию пути. Является ли L регулярным?

Решение: рассмотрим $\uparrow^n\rightarrow^n\downarrow^n$. Для слов $\uparrow^n\rightarrow^n\downarrow^n$ и $\uparrow^k\rightarrow^k\downarrow^k$ $(k < n)$ различающим словом будет служить $\leftarrow^k$: вторую траекторию оно замкнёт, а в первой ещё можно будет провести луч.
Значит, никакие два слова такого вида не L-эквивалентны. Значит, бесконечно много классов L-эквивалентности, и L нерегулярен.

Критерии.

+1 Верная идея, но неверная последовательность слов

+2 Верная последовательность слов (с попыткой обоснования)