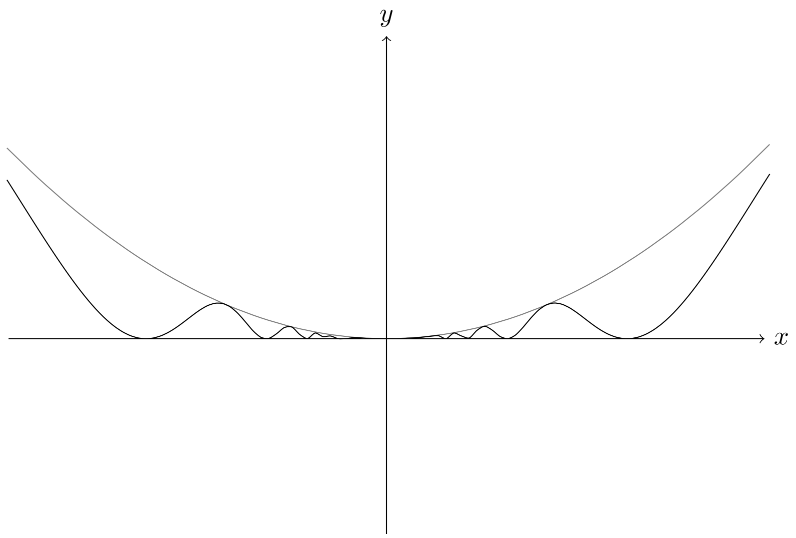
Построение графиков функций

КОНСПЕКТ ЗАНЯТИЯ



Александр Рубцов

8 октября 2015 г.

Черновик v2.81b

Предисловие

Эта брошюра представляет собой расширенный вариант моего рассказа на семинаре по построению графиков функций. Разумеется, всё написанное вряд ли получилось бы уместить в семинар: на семинаре я указывал на ключевые идеи и места, на которые стоит обратить внимание, в этой же брошюре я собрал всё рассказанное воедино и дополнил теорией.

Замечания к черновой версии

Версия $\geqslant 1.0$ означает, что текст готов как по содержанию, так и по оформлению.

О распространении

Если вдруг мы с Вами не знакомы, и каким-то образом к Вам в руки попала эта версия текста и Вы хотите что-то мне сказать, особенно если отругать, то я с радостью буду ждать Ваш отзыв на адрес `alex@rubtsov.su` . В дальнейшем этот текст будет размещён в свободном доступе, если только он не окажется совсем уж ужасным и бесполезным. Черновую версию просьба широко не распространять.

Функция и её график

Говорят, что функция f из множества X в множество Y – это правило, согласно которому элементам из множества X ставятся в соответствие элементы из множества Y. При этом считают, что каждому элементу из X ставят в соответствие не более одного элемента из Y. Если элементу x из X ставится в соответствие элемент y из Y, это записывают как $f(x) = y$, в этом случае y называется *образом* элемента x. То, что в соответствие ставится не более одного элемента означает, что с одной стороны для некоторых элементов X образа может не быть вовсе: скажем, в случае функции $\sqrt{x}$, число -1 не имеет образа; с другой стороны, это буквально значит, что функция не может ставить в соответствие одному x два элемента из Y: окружность функцией не является, поэтому в школьном курсе вы не должны были ни разу слышать о «функции окружности», но обязательно слышали про «уравнение окружности».

Все элементы множества X, для которых определён образ функции f, образуют подмножество множества X, которое называют областью определения функции и обозначают $D(f)$. Множеством значений функций называют множество, состоящее из всех элементов y, таких что при некотором x элемент y является образом x. Множество значений обозначают $E(f)$, и сказанное о нём выше можно компактно записать формулой

$$E(f) = \{f(x) \mid x \in D(x)\}.$$

Всё выше сказанное относилось к общему определению функции. Поскольку нас интересует построение графиков функций, то мы будем работать с числовыми функциями, то есть, функциями у которых $X = \mathbb{R}$ и $Y = \mathbb{R}$. Определим теперь, что такое график функции.

Определение 1. Графиком функции f называется множество $\mathrm{graph}(f)$, состоящее из всех пар точек вида $(x, f(x))$, где $x \in X,\ f(x) \in Y$

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}.$$

Под построением графика понимается нанесение точек из множества $\mathrm{graph}(f)$ на координатную плоскость. Как видно из определения графика, нас интересуют только точки, координата x которых принадлежит области определения функции, поэтому первым этапом при построении графика функции, является нахождение области определения и множества значений функции.

Разрывы и асимптоты

На первом этапе построения графика функции сначала находят её область определения и множество её значений. Некоторые точки, не входящие в область определения, заслуживают особого внимания, а именно точки разрыва.

Напомним, что точка x_0 называется точкой разрыва функции f, если функция f определена во всех точках некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ точки x_0 и либо не определена в точке x_0, либо определена, но не является непрерывной в этой точке. В свою очередь отсутсвие непрерывности может происходить по разным причинам, и в зависимости от них и классифицируют род разрыва функции. Самый простой случай отсутствия непрерывности в точки x_0 – случай, при котором предел функции f в этой точке существует и не равен значению функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ – при этом возможно, что функция просто не определена в этой точке. В этом случае, точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.

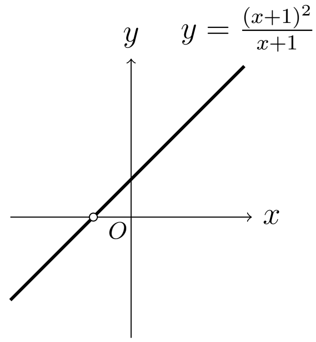


Рис. 1: устранимый разрыв.

Если в точке x_0 у функции f существуют предел справа и предел слева и их разность $\Delta f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ конечна, то такой разрыв называется разрывом *первого рода*. Разность $\Delta f(x_0)$ называют скачком. Заметим, что устранимый разрыв является частным случаем разрыва первого рода, когда скачок $\Delta f(x_0)$ равен нулю. Если точка разрыва не является точкой разрыва первого рода, то её называют точкой разрыва *второго рода*.

При построении графиков, чаще всего разрыв второго рода возникает, когда хотя бы один из односторонних пределов бесконечен, поэтому студенты часто забывают о случаях, когда пределы справа и слева не определены вовсе: например функция $\sin(1/x)$ имеет в нуле разрыв второго рода.

Итак, на первым этапе при построении графика функции необходимо найти область определения функции, множество её значений, классифицировать точки разрыва, если они есть. После этого переходят к построению *асимптот* – прямых, расстояние от которых до графика функции стремится к нулю при достаточно больших x или y. Асимптоты делят на три категории: *вертикальные*, *горизонтальные* и *наклон-*

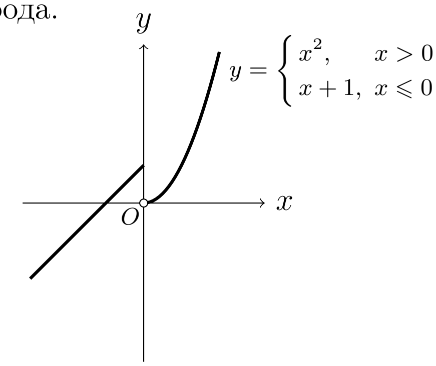


Рис. 2: разрыв 1-го рода.

Черновик v2.81b

ные. Пусть асимптота задана уравнением прямой $ay + bx + c = 0$. В случае, если $a = 0, b \neq 0$ получаем вертикальную асимптоту, в случае $a \neq 0, b = 0$ получаем горизонтальную асимптоту, а в случае $a \neq 0, b \neq 0$ получаем наклонную асимптоту. Функция f имеет в точке x_0 вертикальную асимптоту, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности.

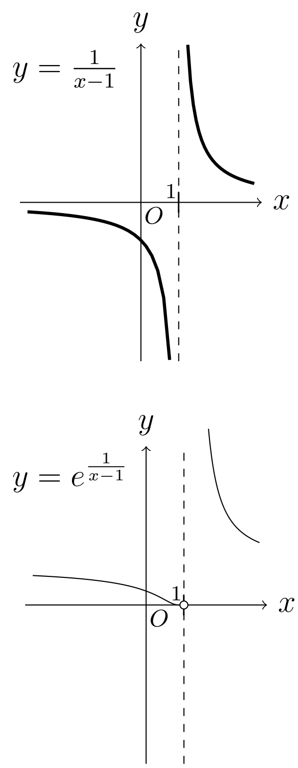


Рис. 3: разрывы 2-го рода.

Хрестоматийным примером функции, которая имеет вертикальную асимптоту, является гипербола. На рисунке 3 изображена гипербола $y = 1/(x-1)$ с вертикальной асимптотой $x = 1$. При этом для существования вертикальной асимптоты достаточно, чтобы хотя бы один из односторонних пределов был бесконечен, как в случае с функцией $y = \exp(1/(x-1))$.

Функция имеет горизонтальную асимптоту, если она имеет на бесконечности конечный предел. При этом стоит помнить, что если предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, то при этом возможно что один из её пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ может быть конечен и тогда функция будет иметь горизонтальную асимптоту только при x, стремящемся к одной из бесконечностей.

Осталось разобраться с тем, в каком случае имеет место быть наклонная асимптота. Как было замечено выше, коэффициенты при x и y в уравнении наклонной асимптоты неравны нулю, поэтому её уравнение имеет вида $y = kx + b$, где $k \neq 0$. Поэтому коэффициент k ищут из предела $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/x$ (если он конечен, то он равен k), а параметр b ищут из предела $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - kx$.

Пример 1. Функция $f(x) = \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$ определена всюду, кроме точки 1: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, имеет в точке 1 разрыв второго рода и вертикальную асимптоту в ней, поскольку пределы справа и слева бесконечны и имеет наклонную асимптоту $y = x + 2$: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+1}{x^3-2x^2+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+1/x^3}{1-2/x+1/x^2} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+1-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1} = 2$.

Как и в случае с горизонтальной асимптотой, наклонная может быть только на одной из бесконечностей: на рисунке 5 приведён пример функции, которая

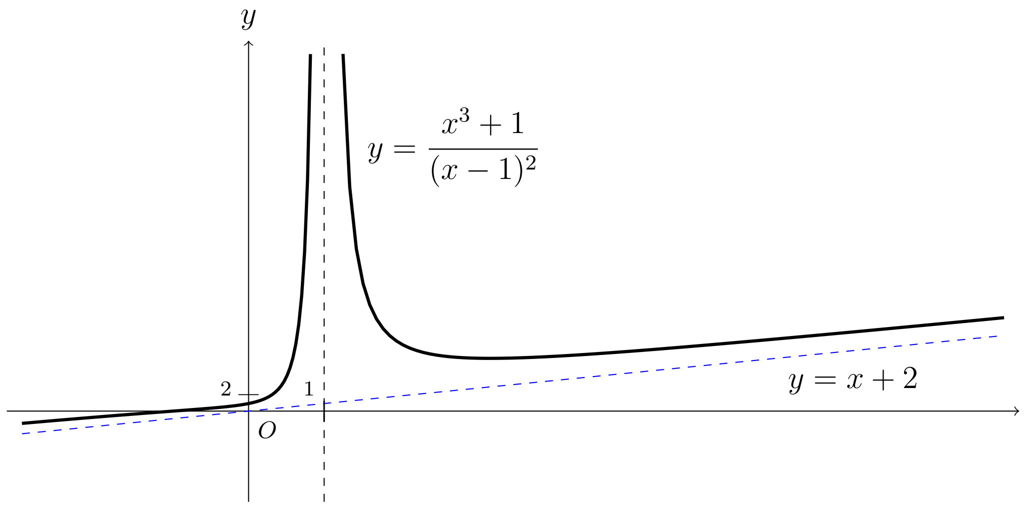


Рис. 4: Пример 1.

имеет горизонтальную асимптоту при $x \to +\infty$ и наклонную асимптоту при $x \to -\infty$.

Упражнение 1. Найти асимптоты функции $y = 2xe^{-|x|-x} + 0.1$.

Упражнение 2. Найти асимптоты функции $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

После того как асимптоты найдены, следует найти нули функции и *промежутки знакопостоянства* – интервалы области определения, на которых функция сохраняет знак, то есть либо $f(x) > 0$, либо $f(x) < 0$. Зная асимптоты, нули функции и промежутки знакопостоянства можно построить эскиз графика. В случае, когда функция не имеет асимптот, в процессе исследования этого факта становится известно, чего стоит ждать от функции на бесконечности – это не обязательно что-то хорошее, возможно на бесконечности функция вовсе не имеет предела, как, например, функция $\sin(x)$. Дальнейшие исследования функции посвящены различным деталям, и при их исследовании легко ошибиться, поэтому если что-то полученное далее противоречит эскизу графика, то нужно искать ошибку (возможно в эскизе, но чаще в деталях).

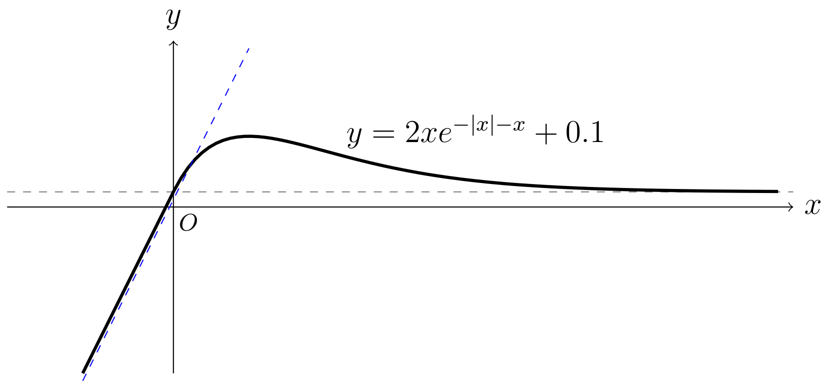


Рис. 5: горизонтальная и наклонная асимптоты.

Промежутки возрастания и убывания

Когда речь заходит о понятиях возрастания и убывания, то часто возникает путаница: в одних книжках под возрастанием понимается неубывание, а в других строгое возрастание. Мы будем понимать под возрастанием и убыванием на интервале неубывание и невозрастание соответственно. Определим теперь эти понятия.

Определение 2. Будем говорить, что функция f возрастает на интервале (a, b), если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$, таких что $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Если при этом $f(x_1) < f(x_2)$, будем говорить, что функция f строго возрастает на интервале (a, b).

Перевернув знаки сравнения, получим определение для убывания. Если функция возрастает или убывает на интервале (a, b), то говорят, что она *монотонна* на интервале (a, b), в случае если функция строго возрастает или строго убывает, то говорят, что она строго монотонна. Если функция монотонна на интервале (a, b), то говорят, что (a, b) является промежутком возрастания или убывания, в зависимости от происходящего.

Для поисков промежутков возрастания и убывания полезна следующая теорема.

Теорема 1. *Функция f возрастает на интервале (a, b), если она дифференцируема на этом интервале и для любой точки $x \in (a, b)$, выполняется $f'(x) \geqslant 0$. Если при этом $f'(x) > 0$, то функция f строго возрастает на интервале (a, b).*

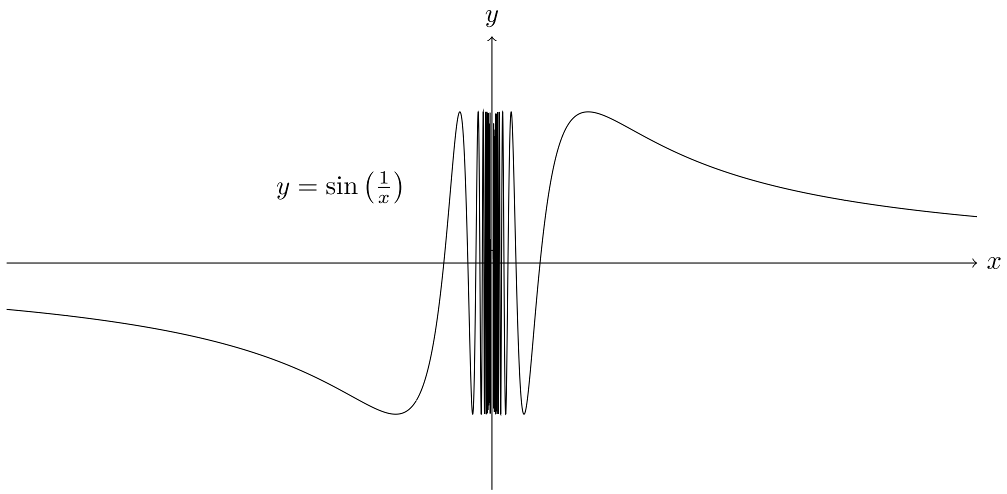


Рис. 6: Разрыв второго рода в нуле.

Симметрично, если $f'(x) \leqslant 0$, то функция $f(x)$ убывает на интервале (a, b).

Оговоримся, что в рамках построения графиков мы исследуем функции, которые непрерывны и дифференциуемы на всей числовой прямой, за исключением некоторого конечного числа точек. Таким образом, промежутки монотонности функции стоит искать, предварительно разбив ось абсцисс на интервалы в которых функция дифференцируема, а после чего смотреть что происходит в точках, в которых производной не существует вовсе. Напомним, что бывают всякие «паразитные» случаи, типа функции $\sin 1/x$, которая в любой полуокрестности нуля не возрастает и не убывает. Напомним, что под левой (δ-)полуокрестностью точки x_0 мы понимаем множество $U_\delta(x_0 - 0) = (x_0 - \delta, x_0)$, а под правой – $U_\delta(x_0 + 0) = (x_0, x_0 + \delta)$.

Локальные экстремумы

Говорят, что функция f имеет (нестрогий) *локальный максимум* в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 и для любого x из $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполняется $f(x_0) \geqslant f(x)$. В случае когда достигается строгое неравенство: $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : f(x_0) > f(x)$, точку x_0 называют точкой *строгого локального максимума*. Симметрично, заменой знака неравенства определяется локальный минимум и строгий локальный минимум.

Упражнение 3. В каком из случаев в определении (локального максимума или строгого локального максимума) можно взять непроколотую окрестность?

Локальными экстремумами называются точки, в которых функция имеет либо локальный максимум, либо локальный минимум. Такие экстремумы называют также нестрогими. В случае если функция в точке имеет строгий локальный максимум или минимум, говорят, что функция имеет строгий локальный экстремум[1]. Ниже мы будем говорить о локальном максимуме, однако перевернув все знаки неравенств, читатель сможет получить соответствующие утверждения и для локальных минимумов, что мы и оставляем в качестве упражнения.

В случае, когда функция f дифференцируема в точке локального экстремума, для неё выполняется теорема Ферма.

Теорема 2 (Ферма)**.** *Если функция f дифференцируема в точке локального экстремума x_0, то её производная равна нулю в этой точке: $f'(x_0) = 0$.*

Понимание откуда берётся этот простой и изящный факт крайне полезно при построении графиков, поэтому мы докажем эту теорему для случая локального максимума.

Доказательство. Рассмотрим левую полуокрестность $U_\delta(x_0 - 0)$ точки x_0. Для всякой точки $x \in U_\delta(x_0 - 0)$ выполнено $f(x_0) - f(x) \geqslant 0$. И в то же время выполнено $\dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geqslant 0$, так как в левой полуокрестности $x_0 > x$. В силу существования производной в точке x_0, переходя к пределу в предыдущем неравенстве, получаем, что $f'(x_0 - 0) \geqslant 0$. Проделаем аналогичные действия для правой полуокрестности: получим, что $\dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leqslant 0$ и $f'(x_0 + 0) \leqslant 0$. Но так как функция f имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$, а значит $f'(x_0) = 0$.

□

Поскольку производная в точке равна угловому коэффициент касательной, то геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что в нулях производной касательная параллельна оси абсцисс. На рисунке 7 приведена иллюстрация для функции $\sin(x)$. Заметим, что в точках $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$ синус имеет строгий экстремум,

[1] Заметим, что строгий экстремум является частным случаем нестрогого экстремума.

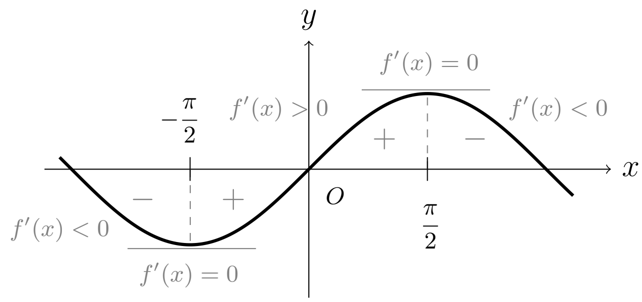


Рис. 7: Иллюстрация геометрического смысла теоремы Ферма.

и при этом в полуокрестностях слева и справа от экстремумов производная сохраняет знак. Это наблюдение обобщается до следующей теоремы.

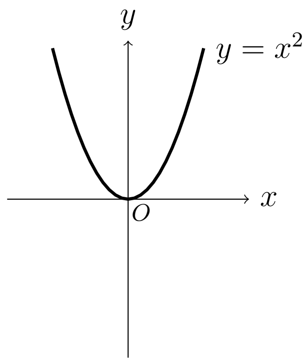
Теорема 3. *Функция f имеет в точке x_0 строгий экстремум, если существует такая проколотая окрестность точки x_0, что функция f дифференцируема в этой окрестности, сама функция непрерывна в точке x_0, и при этом производная в одной из полуокрустностей больше нуля, а в другой меньше нуля.*

Перепишем на всякий случай условие теоремы в формулах для локального максимума. Не забудьте при переходе к формулам, что мы требуем дифференцируемости функции f во всей окрестности, кроме быть может самой точки x_0, и непрерывности в x_0.

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0 - 0)\ f'(x) > 0, \forall x \in U_\delta(x_0 + 0)\ f'(x) < 0.$$

Ещё раз обратим внимание на то, что условие теоремы Ферма необходимое (для дифференцируемых функций), но не достаточное: функция x^2 имеет в точке 0 локальный минимум, а x^3 нет. Так же из доказательства видно почему так получилось: продифференцируем x^2 – получим производную $2x$, которая меньше нуля в левой полуокрестности и больше нуля в правой полуокрестности, а значит что 0 – точка строгого локального минимума; продифференцировав x^3, получим производную $3x^2$, которая и слева от нуля и справа от нуля положительная, а значит в точке 0 локального экстремума нет.

Точки, в которых функция определена, а производная равна нулю или не существует, называют *критическими точками*. По теореме Ферма, если функция имеет экстремум в точке, где она дифференцируема, то в этой точке производная равна нулю, но если в точке производной не существует вовсе, то под условие теоремы Ферма она не попадает, а значит в ней может существовать локальный



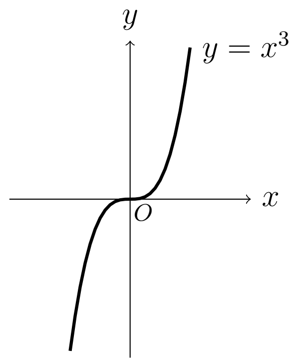


Рис. 8: Исследование на экстремум в нуле функций x^2 и x^3.

экстремум. Классический пример такого экстремума: минимум функции $|x|$. Таким образом локальные экстремумы следует искать среди критических точек.

Пример с функциями x^2 и x^3 обобщается до следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть функция f дважды дифференцируема в точке x_0, и при этом $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$. Тогда, если $f''(x_0) > 0$, то f имеет в точке x_0 локальный минимум, а если $f''(x_0) < 0$, то f имеет в точке x_0 локальный максимум.*

Идея доказательства состоит в представлении функции f по формуле Тейлора в полуокрестностях точки x_0.

$$f(x_0 - \xi) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(-\xi)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(\xi)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Видно, что если разности $f(x_0 \pm \xi) - f(x_0)$ имеют один знак, то разделив на $(x - x_0)$ в одном случае мы получим отрицательное число, а в другом положительное, а переходя к пределу получим, что в одной полуокрестности производная будет иметь положительный знак, а в другой отрицательный.

Что же происходит в случае, когда вторая производная равна нулю? для этого нам потребуется более общая и более сильная теорема.

Теорема 5. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 n раз и $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, и при этом $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда, при чётном n, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то f имеет в точке x_0 локальный минимум, а если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то f имеет в точке x_0 локальный максимум. При нечётном n в точке x_0 экстремума нет.*

Так же воспользуемся представлением по формуле Тейлора.

$$f(x_0 - \xi) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(-\xi)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\xi)^n + o((x - x_0)^n)$$

Из этих формул видно, что в случае чётной степени, $(-\xi)^n = (\xi)^n$, поэтому разности $f(x_0 \pm \xi) - f(x_0)$ имеют один знак, что и означает строгое возрастание или строгое убывание функции на полуокрестности, в зависимости от знака разности (и конечно знака перед ξ, который отвечает за выбор полуокрестности). В случае когда разности имеют разный знак, ни возрастания ни убывания не происходит.

Упражнение 4. Разберитесь с доказательством этой теоремы, проследите при этом за о-малыми. Почему о-малое не влияет на знак функции?

Заметим, что мы в этом разделе до сих пор говорили о строгих экстремумах, которые являются частным случаем нестрогих экстремумов. Чем же они отличаются? Рассмотрим нестрогие локальные экстремумы, которые при этом не являются строгими. Назовём такие экстремумы *существенно нестрогими*. Поясним смысл этой тавтологи на примере существенно нестрогого локального минимума. В случае существенно нестрогого минимума, функция f имеет такую окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любой точки x из $U(x_0)$ выполняется $f(x_0) \leqslant f(x)$ и при этом в любой проколотой $\delta-$окрестности $\mathring{U}_\delta(x_0)$ есть точка ξ, такая что $f(x_0) = f(\xi)$.

Упражнение 5. Проверьте, что описанное выше действительно следует из определения существенно нестрогого экстремума.

Этот случай кажется довольно искуственным, но давайте изготовим его пример. Для этого возьмём функцию $\sin(1/x)$ и возведём её в квадрат. Эта функция в любой полуокрестности нуля пересекает ось Ox бесконечное число

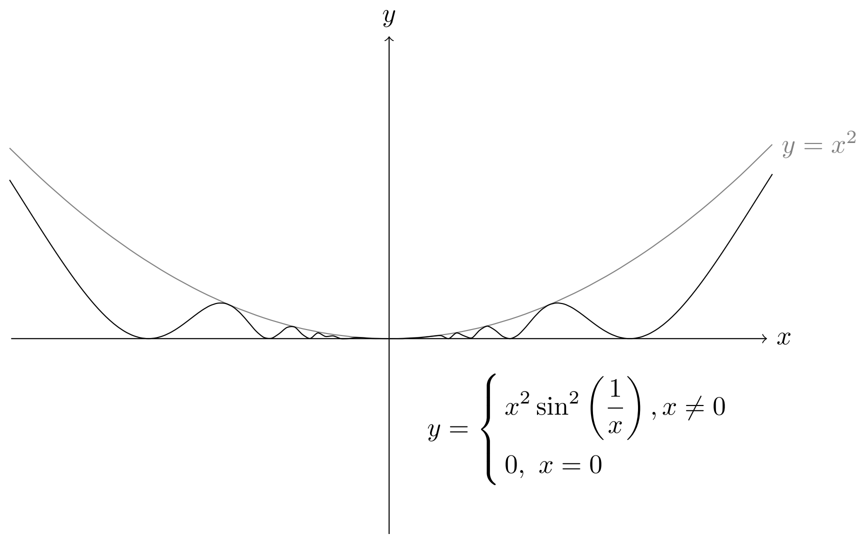


Рис. 9: Нестрогий локальный минимум в нуле.

раз, а следовательно её производная не сохраняет в знак в полуокрестности. Но эта функция имеет разрыв второго рода в нуле, поэтому чтобы его сгладить домножим синус на x^2 и получим функцию $x^2 \sin^2(1/x)$, которую доопределим по непрерывности в нуле. Таким образом мы получили функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right), x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

Упражнение 6. Убедитесь, что в нуле функция $f(x)$ имеет нестрогий минимум.

Как видно из построенного выше примера – определения вовсе не такая простая вещь как может показаться, и следовать за интуицией при построении графиков разумно, но при этом стоит помнить, что бывают контринтуитивные случаи. Если функция достигает экстремума (даже строгого), то она вовсе не обязана быть монотонной хотя бы в некоторой полуокрестности экстремума. Изготовим теперь контринтуитивный пример для строгого экстремума: для этого возьмём среднее от нашей функции $x^2 \sin^2(1/x)$ и функции x^2, опять доопределив её значение в нуле по непрерывности. Заметим, что получилась функция $f(x)/2 + x^2/2$.

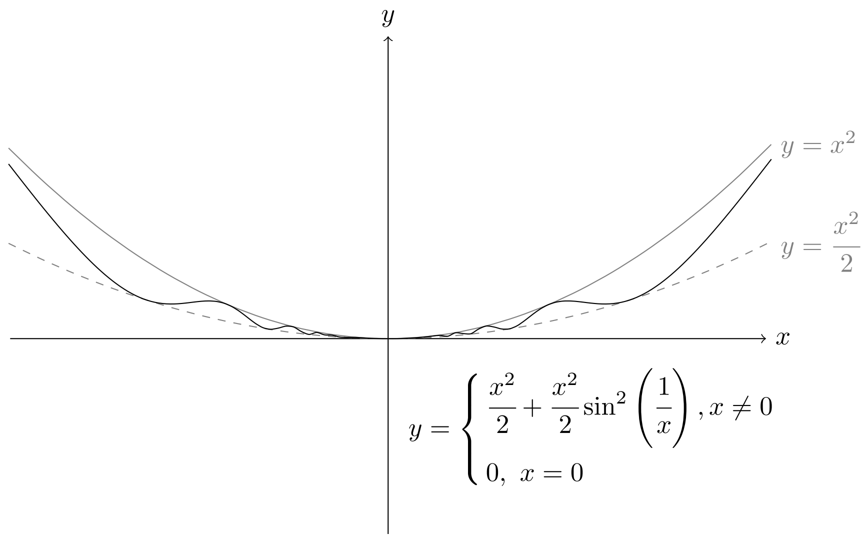


Рис. 10: Строгий локальный минимум в нуле.

Упражнение 7. Убедитесь, что функция $f(x)/2 + x^2/2$ имеет в нуле строгий минимум.

Выпуклость

Вслед за исследованием функции на экстремумы, её исследуют на выпуклость.

Определение 3. Функция называется выпуклой вниз на отрезке $[a, b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполняется хотя бы одно из следующих неравенств:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \tag{1}$$

$$f(tx_1 + (t-1)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2),\ t \in [0, 1] \tag{2}$$

Упражнение 8. Докажите равносильность этих неравенств.

Эти неравенства так же имеют и геометрический смысл: первое неравенство означает, что середина отрезка, стягивающего точки (хорды), лежащие на графике, лежит выше графика (см. рис. 11), а второе (более сильное) неравенство означает, что хорда лежит выше дуги.

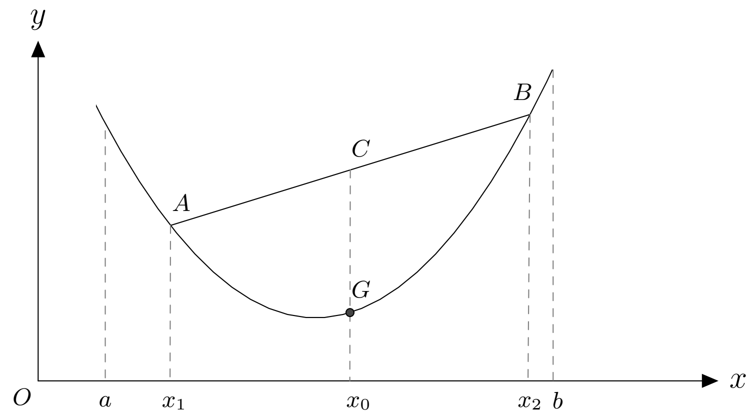


Рис. 11: иллюстрация определения выпуклости через неравенства.

В случае обратных знаков в определении, функция называется *выпуклой вверх* или *вогнутой*. В случае строгих неравенств, функция называется строго выпуклой (вверх/вниз).

Выпуклость связана со второй производной функцией, если функция дважды дифференцируема: воспользуемся приёмом, схожим с применяемым, использованным в доказательстве теоремы 5. Для начала проведём предварительную подготовку: пусть $\Delta x = (x_2 - x_1)/2$, $x_0 = (x_2 + x_1)/2$, тогда $x_1 = x_0 - \Delta x$, а $x_2 = x_0 + \Delta x$. Теперь воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)(-\Delta x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(-\Delta x)^2$$
$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)(\Delta x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(\Delta x)^2$$

$$\frac{f(x_0 - \Delta x) + f(x_0 + \Delta x)}{2} = f(x_0) + \left(\frac{f''(\xi_1)}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2}\right)(\Delta x)^2 \qquad (3)$$

Отсюда следует, что если вторая производная положительная, то выполняется неравенство 1. Фактически это идея доказательства следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть функция f' существует на отрезке $[a, b]$, а функция f'' существует на интервале (a, b). Тогда если $f''(x) \geqslant 0$ для любого $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ выпукла вниз на отрезке $[a, b]$.*

При строгом неравенстве достигается строгая выпуклость. При отрицательном знаке второй производной, функция выпукла вверх.

Подобно тому как при исследовании функции на возростсание и убывание возникают экстремумы, при исследовании функции на выпуклость возникают точки перегиба.

Заметим, что выпуклость функции на отрезке вовсе не обязательно влечёт её дифференцируемость: функция $|x|$ является выпуклой на отрезке $[-1, 1]$, но не дифференцируема на нём в нуле.

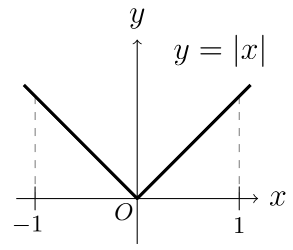


Рис. 12: $|x|$ – выпуклая функция.

Определение 4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в точке x_0 конечную или бесконечную производную. Тогда, если при переходе через x_0 функция f меняет направление выпуклости, то точка x_0 называется точкой перегиба функции f.

Заметим, что существование производной в точке влечёт за собой существование в ней касательной. Точка перегиба называется так потому, что в ней происходит перегиб графика через касательную. Изменение направления выпуклости означает, что на одной полуокрестности точки x_0 функция f выпукла вверх, а на другой полуокрестности функция f выпукла вниз. Классическим примером точки перегиба функции служит функция x^3 с перегибом в нуле. На рисунке 13 изображены графики функций x^3 и обратной к ней функции $\sqrt[3]{x}$, которые иллюстрируют, что перегиб в нуле происходит через касательную – в первом случае она горизонтальная, а вторая вертикальная. Так же отметим, что обратная функция, в случае если функция обратима, получается из прямой поворотом системы координат и касательные при этом так же поворачиваются: так горизонтальная касательная в нуле превращается в вертикальную, а значит функция $\sqrt[3]{x}$ имеет в нуле бесконечную производную. Заметим, что функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ не имеет в нуле точку перегиба: при переходе через ноль направление выпуклости функции не меняется. Такие точки называют точками возврата.

Упражнение 9. Докажите, что функция $\arcsin x$ имеет в нуле точку перегиба через вертикальную касательную, не дифференцируя при этом функцию $\arcsin x$.

Приведём по теореме на необходимое и на достаточное условие выпуклости.

Теорема 7 (необходимое условие наличия точки перегиба)**.** *Пусть x_0 – точка перегиба функции $f(x)$ и если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 вторую производную, непрерывную в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.*

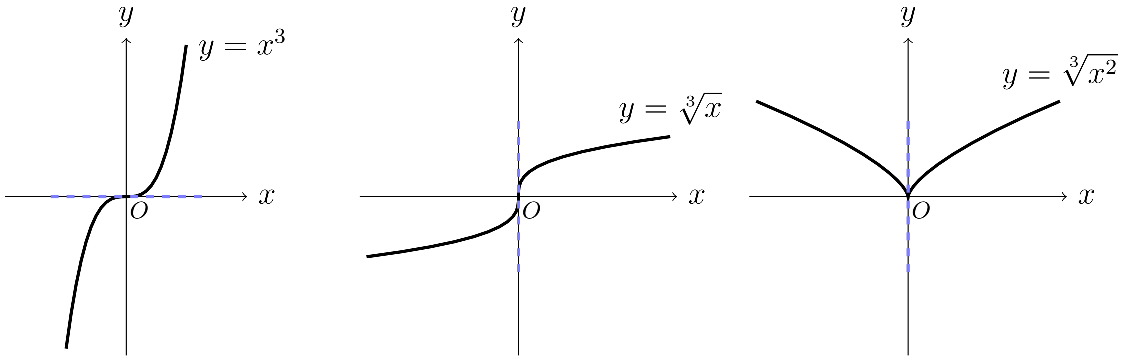


Рис. 13: Кубические функции

Теорема 8 (достаточное условие наличия точки перегиба)**.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в точке x_0 конечную или бесконечную производную. Тогда, если при переходе через x_0 функция $f''(x)$ меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба функции f.*

Заметим, что эта теорема по-сути является переписыванеим определения и использования результатов, следующих из формулы 3.

Теорема 9. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в точке x_0 конечную или бесконечную производную и $f''(x_0) = 0$. Тогда, если третья производная $f^{(3)}(x)$ в точке x_0 не равна нулю, то точка x_0 является точкой перегиба функции f.*

Упражнение 10. Попробуйте доказать эту теорему, используя примерно тот же приём с формулой Тейлора, что был использован при доказательстве достаточного условия экстремума.

Условие на наличие (возможно бесконечной) производной в точке, является существенным для точки перегиба. На рисунке 14 показан пример функции,

$$y = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

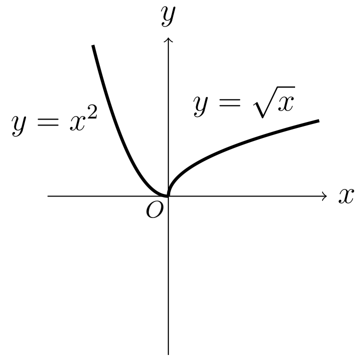


Рис. 14: O – не точка перегиба.

которая при переходе через ноль меняет направление выпуклости, однако ноль не является точкой перегиба, поскольку производной в нуле не существует (а условие на существование производной есть в определении точки перегиба!).

План построения графика

Итак, подведём итог выше сказанного, описав алгоритм построения графика.

1. Найти области определение D функции f и множество её значений E.
2. Найти асимптоты.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства.
4. Построить эскиз графика.
5. Вычислить производную $f'(x)$, найти локальные экстремумы и промежутки возрастания и убывания функции.
6. Вычислить вторую производную $f''(x)$, найти точки перегиба и промежутки выпуклости (вверх/вниз).
7. Нарисовать график функции.

Пример

На семинаре были разобраны другие примеры: сначала мы разобрали несколько примеров построения графиков рациональных функций, а затем перешли к примеру №12.10 (§21). В этом разделе приведён новый пример построения графика функции – пример для функции $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x}e^{\frac{1}{x}}$.

Исследование области определения и множества значений

Функция определена всюду, кроме точки 0. Рассмотрим предел слева и предел справа в нуле: при $x \to -0$, функция $e^{1/x}$ стремится к нулю, поэтому возникает неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Функция $x^2 + 2x - 3$ ограниченна в окрестности нуля, поэтому исследуем сначала функцию $e^{1/x}/x$, по опыту подозревая, что в минус нуле она стремится к нулю. Действительно, сделаем замену $t = -1/x$

и тогда $\lim\limits_{x\to -0} e^{1/x}/x = \lim\limits_{t\to+\infty} -e^{-t}t = \lim\limits_{t\to+\infty} -t/e^{t}$, что по правилу Лопиталя есть $\lim\limits_{t\to+\infty} -e^{-t} = 0$, поэтому и $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 0$. Проделав схожие действия для правой окрестности нуля, получим что $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = -\infty$, а значит в нуле функция имеет вертикальную асимптоту.

Поскольку на бесконечности функция $e^{1/x}$ стремится к единице, и как легко видеть $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-3}{x} = +\infty$, из непрерывности функции справа от нуля получаем, что множество значений функции совпадает с множеством действительных чисел: $E(f) = \mathbb{R}$.

Итак, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $E(f) = \mathbb{R}$.

Поиск асимптот

Вертикальную асимптоту в нуле мы уже нашли, исследуя область определения функции. Перейдём к поиску горизонтальных и наклонных асимптот.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} (1 + 2/x - 3/x^2) e^{\frac{1}{x}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} (1 + 2/x - 3/x^2) \times \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \times 1 = 1.$$

Значит функция имеет наклонную асимптоту, осталось найти коэффициент b.

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-3}{x} e^{\frac{1}{x}} - x = \lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}} + 2e^{\frac{1}{x}} - 3/xe^{\frac{1}{x}} - x =$$
$$= \lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}} + 2 - x = \lim_{x\to\infty} x(1 + 1/x + o(1/x)) + 2 - x = 3.$$

На предпоследнем переходе мы разложили $e^{1/x}$ по формуле Тейлора в окрестности бесконечности.

Итак, функция имеет наклонную асимптоту $x + 3$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

Пересечение с осями и промежутки знакопостоянства

Преобразуем $\frac{x^2+2x-3}{x} e^{\frac{1}{x}}$ как $\frac{(x-1)(x+3)}{x} e^{\frac{1}{x}}$. Отсюда видно, что функция имеет нули $x = -3, 1$ и как мы знаем из первого пункта выколотую точку $(0, 0)$. Функция меняет знак при переходе через точки $-3, 0, 1$ начиная с минуса (левее -3). Укажем промежутки знакопостоянства на эскизе графика.

Отметим промежутки знакопостоянства на рис. 16.

Построение эскиза графика

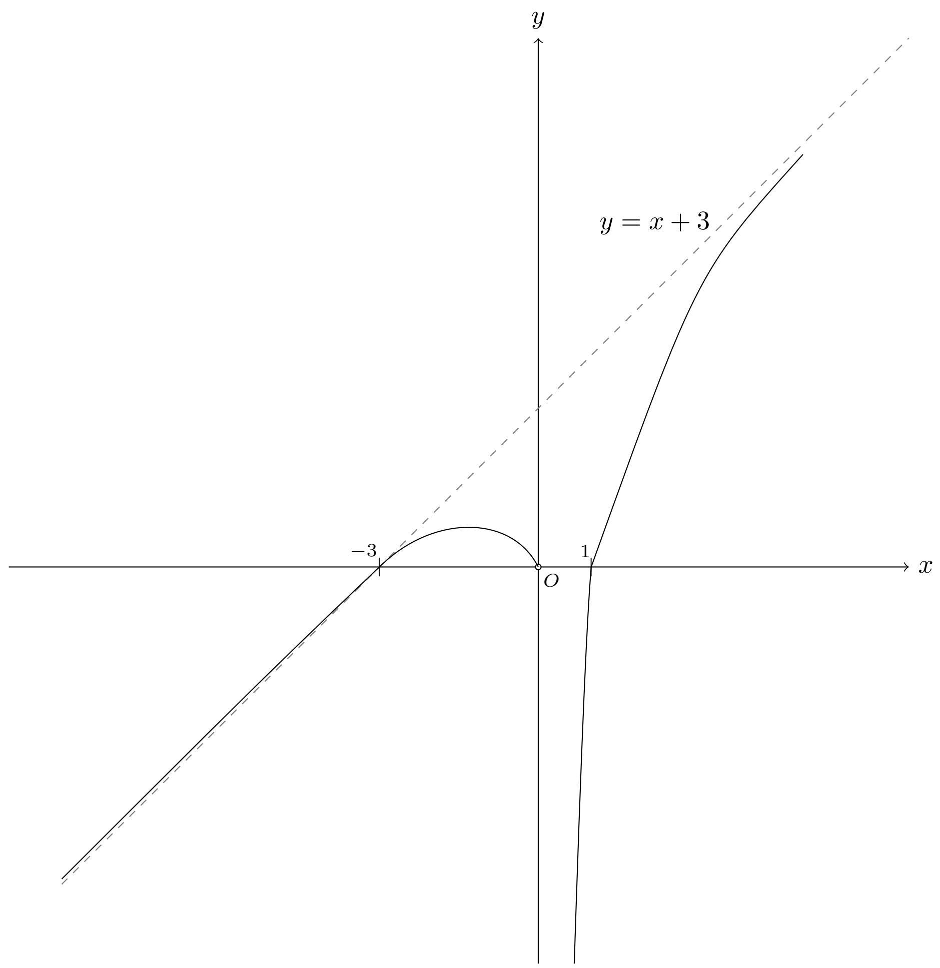


Рис. 15: Эскиз графика

На эскизе присутствует асимптота $y = x + 3$, асимптота $x = 0$ совпадает с осью Oy. Перейдём к более детальному построению графика, воспользовавшись для его исследования аппаратом производных.

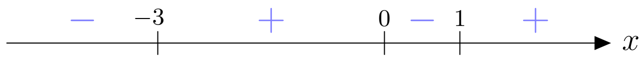


Рис. 16: Промежутки знакопостоянства.

Поиск экстремумов и промежутков возрастания и убывания

Оставим детальное вычисление производной читателю в качестве упражнения и лишь приведём результат вычисления.

$$y' = \frac{x^3 - x^2 + x + 3}{x^3} e^{\frac{1}{x}} = \frac{(x+1)(x^2 - 2x + 3)}{x^3} e^{\frac{1}{x}}.$$

Трёхчлен $x^2 - 2x + 3$ не имеет действительных корней, производная имеет корень $x = -1$ и меняет знак при переходе через точки -1 и 0. Таким образом функция возрастает на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$, а убывает на промежутке $(-1, 0)$. В точке -1 функция имеет локальный максимум по теореме 3, равный $4/e$. Поскольку функция дифференцируема всюду, кроме нуля, а в нуле неопределена, то она имеет единственный локальный экстремум.

Исследование на выпуклость

Приведём теперь результат вычисления второй производной.

$$y'' = -\frac{x^2 + 10x + 3}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$$

Квадратный трёхчлен $x^2 + 10x + 3$ имеет корни $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{22}$, при этом вторая производная не определена, но меняет знак при переходе через 0. Таким образом, функция имеет следующие промежутки выпуклости: функция выпукла вниз на промежутке $(-\infty; -5 - \sqrt{22})$ и $(-5 + \sqrt{22}, 0)$; функция выпукла вверх на промежутках $(-5 - \sqrt{22}, -5 + \sqrt{22})$ и $(0, +\infty)$. Точки $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{22}$ удовлетворяют требованиям теоремы 8, а по сему являются точками перегиба[2]. Поскольку функция дважды дифференцируема всюду кроме нуля, а в нуле не определена, то мы отыскали промежутки выпуклости.

Оформим исследование производных более компактно, нанеся их знаки на прямые.

[2]На контрольной вполне достаточно указать, что при переходе через эти точки вторая производная меняет знак.

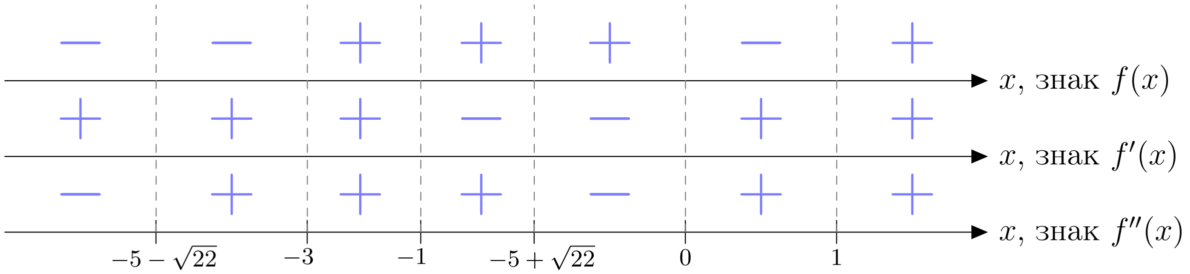


Рис. 17: Знаки функции и производных.

Осталось только построить график функции.

Построение графика

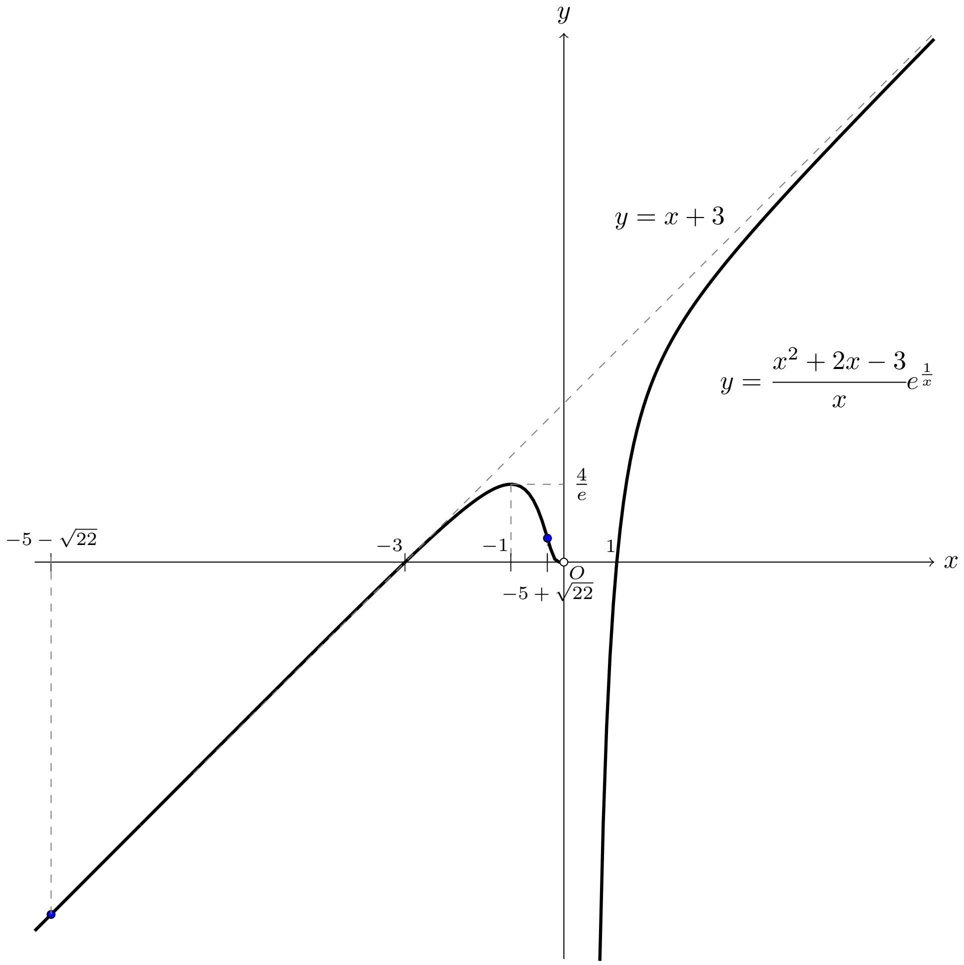


Рис. 18: График функции.

Литература

[1] *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. — Физматлит, 2003. — Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. — 496 с.

[2] *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И* Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов. — 3-е изд., исправл. — М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2001. — 672 с.

[3] *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Том 1. М.: Дрофа, 2003. —496 с.